研究ノート

フィボナッチ数の閉じた計算式　解析的アプローチと代数的アプローチ

野　呂　春　文
日本福祉大学　健康科学部

Closed formula of Fibonacci number, analytical and algebraic approaches

NORO, Harufumi
Faculty of Health Sciences, Nihon Fukushi University

Keywords: Fibonacci number, closed formula, generating function, matrix representation

1　はじめに

次の式で定義される数列 F_n をフィボナッチ数列とよぶことは良く知られているとおりである．

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1, n \in Z \tag{1}$$

例えば，$n = 0, 1, \ldots$ に対して $F_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ である．

フィボナッチ数 F_n は n によって値が決定されるから n の関数とみなすことができる．そこで，上記のような再帰的定義ではなく，あらわに n だけに依存する数式として書き下すと，次のようになることも知られている．

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \right) \tag{2}$$

整数の足し算だけで作られるフィボナッチ数列が，このように複雑な式で表わされることに多くの初学者は驚かされる．

式 (2) は，J.P.M.Binet が 1843 年に発表したことをもって“Binet の公式”と呼ばれている．しかし，D.Knuth らによると，1730 年ごろ A.de Moivre がこの式を初めて発表しており，次いで，L.Euler が 1765 年に著書で公にしているそうである．数学ではしばしばこのようなことが起こっており，真の発見者よりも後世の研究者の名前が冠される例が珍しくない．

上に名をあげた数学者達はいずれも，式 (2) を良く似た方法で導いている．それは，Euler がその著書「無限解析序説」[1] の中で説明しているようなある種の“解析的”な方法である．一方，19 世紀の中ごろ以降に発達したために彼らの時代には知られていなかった“代数的”な方法で式 (2) を導くこともできる．この小文では，それら 2 つのアプローチを高校数学で理解できるように解説する．

2　解析的アプローチ

数列の母関数を利用する方法である [2]．フィボナッチ数 F_n を係数とする無限級数,

$$f(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \cdots + F_n x^n + \ldots \tag{3}$$

をフィボナッチ数列の母関数とよぶ．このように定義された関数からは，フィボナッチ数列のすべての性質が導き出されると考えられるからである．

フィボナッチ数列の定義 (1) より，$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$ であるから，

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x \tag{4}$$

に $F_0 = 0$ と $F_1 = 1$ を代入すると，

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2} \tag{5}$$

が得られる．これを無限級数展開して式 (3) と項ごとに比較すれば F_n の表示が得られるはずである．
式 (5) が有理関数であることから，等式

$$\frac{1}{1-t}=1+t+t^2+t^3+\ldots, 0\le t<1 \tag{6}$$

が利用できる．そのためには式 (5) を

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{p}{1-Px}+\frac{q}{1-Qx} \tag{7}$$

と書きなおす必要がある．ここで，

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{(p+q)-(pQ+Pq)x}{1-(P+Q)x+PQx^2}$$

より，

$$p+q=0, pQ+Pq=-1 \tag{8}$$

$$P+Q=1, PQ=-1 \tag{9}$$

となるから，それより p,q,P,Q を求める．

式 (9) を満たす P, Q は二次方程式 $y^2-y-1=0$ の根であるから，

$$P=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, Q=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{10}$$

と解くことができる．よって，式 (8) より

$$p=\frac{1}{\sqrt{5}}, q=-\frac{1}{\sqrt{5}} \tag{11}$$

となる．式 (5) は，

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{1-Px}-\frac{1}{1-Qx}\right\} \tag{12}$$

となるので，等式 (6) を利用すると，

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\sqrt{5}}((1+Px+\cdots+P^nx^n+\ldots)\\ &\qquad-(1+Qx+\cdots+Q^nx^n+\ldots)\\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}((1-1)+(P-Q)x+\cdots+(P^n-Q^n)x^n+\ldots) \end{aligned} \tag{13}$$

が得られる．つまり，

$$F_n=\frac{P^n-Q^n}{\sqrt{5}}, P=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, Q=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{14}$$

であり，式 (2) が得られた．

このアプローチでは，微分や積分が表面にあらわれてこないから“解析的”アプローチと呼ぶことに抵抗をおぼえるかもしれない．しかし，ここで用いた母関数を含む無限級数は 18 世紀においては Euler が“無限解析 analysin infinitorum”と呼んでいるように解析的な道具とみなされていた．今日でも，関数を無限級数に展開する際の標準的手法であるテイラー展開は解析的な道具とみなされている．

なお，ここで，式 (6) が成り立つ理由を示しておく．$1/(1-t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\ldots$ と無限級数に展開できたとする．$1=(1-t)(a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+\ldots)$ より，$a_0=1, a_1=a_0, \ldots, a_n=a_{n-1}, \ldots$ がわかるから，$1/(1-t)=1+t+t^2+t^3+\ldots$ である．

3　代数的アプローチ

代数的アプローチの道具として行列を用いる．ここでは行列の利用法として 2 種類の方法を紹介する．

3.1 代数的アプローチその 1

引き続く 2 個のフィボナッチ数 F_n , F_{n-1} をベクトル $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ で表わす [3]．1 つ前のフィボナッチ数のベクトルは $\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$ である．これらのあいだには，

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

という関係が成り立つ．そこで，

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

とおけば，行列 A を使うことによって，

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}=A^2\begin{pmatrix} F_{n-2} \\ F_{n-3} \end{pmatrix}\cdots=A^{n-1}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

が成り立つことが容易にわかる．F_1 と F_0 はあらかじめ与えられているから，F_n について知るには A^{n-1} がわかればよい．そこで行列の冪乗を計算するときの定石にしたがって，A を対角化するために次の定理を利用する．

定理：ジョルダンの標準形
A の特性方程式 $\det(xI-A)=0$ が異なる 2 根 λ_1, λ_2 を持つなら，ある正則行列 P を使って

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

とできる．

特性方程式は，

$$\det(xI-A)=\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=x^2-x-1=0 \tag{19}$$

であるから，異なる 2 根を持ち，$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ である．

式 (18) より，

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P \tag{20}$$

であるから

$$\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}{\lambda_1}^{n-1} & 0\\ 0 & {\lambda_2}^{n-1}\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix}. \tag{21}$$

ここで，

$$\begin{pmatrix}G_1\\ G_0\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}F_1\\ F_0\end{pmatrix} \tag{22}$$

とおけば，

$$\begin{pmatrix}F_n\\ F_{n-1}\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}{\lambda_1}^{n-1}G_1\\ {\lambda_2}^{n-1}G_0\end{pmatrix} \tag{23}$$

である．さらに，

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \tag{24}$$

とおけば，$F_n = {\lambda_1}^{n-1}aG_1 + {\lambda_2}^{n-1}bG_0$ である．つまり，複素数 ξ と η を使って，$F_n = {\lambda_1}^{n-1}\xi + {\lambda_2}^{n-1}\eta$ と表わされることがわかる．

$$\begin{aligned} F_1 &= \xi + \eta \\ F_0 &= {\lambda_1}^{-1}\xi + {\lambda_2}^{-1}\eta \end{aligned} \tag{25}$$

より，　$\xi = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \eta = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$　であるから，

$$F_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n) \tag{26}$$

となり，式 (2) が得られた．

3.2 代数的アプローチその 2

代数的アプローチその 1 では，式 (16) の行列 A をフィボナッチ数のベクトルから，次のフィボナッチ数のベクトルに変換する演算子として考えた．ここでは，少し違ったアプローチとして，フィボナッチ数からなる行列を考えてみる [4]．

引き続くフィボナッチ数からなる行列 $\mathcal{F}_n = \begin{pmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{pmatrix}$ を考える．

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\mathcal{F}_{n-1} \\ \mathcal{F}_1 &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，$\mathcal{F}_1$ を特別に $\mathcal{F}$ と書けば，

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}^n$$

となる．$\mathcal{F}$ は，前出の A と同じものである．ここで

$$\mathcal{F} = A = P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P$$

を思い出すと，

$$\mathcal{F}_{n-1} = \begin{pmatrix}F_n & F_{n-1}\\ F_{n-1} & F_{n-2}\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}{\lambda_1}^{n-1} & 0\\ 0 & {\lambda_2}^{n-1}\end{pmatrix}P \tag{27}$$

となる．

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix}e & f\\ g & h\end{pmatrix} \tag{28}$$

とおけば，$F_n = {\lambda_1}^{n-1}ae + {\lambda_2}^{n-1}bg$ となるから，複素数 ξ と η を使って $F_n = {\lambda_1}^{n-1}\xi + {\lambda_2}^{n-1}\eta$ と表わすことができる．あとは既に述べたとおりで

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n) \tag{29}$$

となり，式 (2) が得られる．

4　おわりに

ここで紹介した 2 つのアプローチを使うと，パラメータ $a_0, a_1, \ldots, a_k$ を持つ線形再帰式，

$$a_0X_n + a_1X_{n-1} + a_2X_{n-2} + \cdots + a_kX_{n-k} = 0 \tag{30}$$

によって生み出される数列の一般項の閉じた計算式を求めることができる．

最初の例として，フィボナッチ数列の係数を一般化したリュカ数列の 1 つ $U_n = U_{n-1} - 2U_{n-2}, U_0 = 0, U_1 = 1$ について，解析的アプローチを使って U_n の閉じた計算式を求めてみる．

数列 $U_0, U_1, \ldots$ の母関数 $u(x)$ を

$$u(x) = U_0 + U_1x + U_2x^2 + \ldots \tag{31}$$

とする．$U_n - U_{n-1} + 2U_{n-2} = 0$ だから，

$$g(x) = \frac{x}{1 - x + 2x^2} \tag{32}$$

である．これを

$$g(x) = \frac{p}{1 - Px} + \frac{q}{1 - Qx} \tag{33}$$

と書き直すと，

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{7}i}\left(\frac{1}{1 - Px} - \frac{1}{1 - Qx}\right), P = \frac{1 + \sqrt{7}i}{2}, Q = \frac{1 - \sqrt{7}i}{2} \tag{34}$$

となる．これより，上記のリュカ数列の閉じた公式として，

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{7}i}\left((\frac{1 + \sqrt{7}i}{2})^n - (\frac{1 - \sqrt{7}i}{2})^n\right) \tag{35}$$

が得られる．この計算式には根号どころか複素数まで登場している．

次に４項関係式，$T_n = aT_{n-1} + bT_{n-2} + cT_{n-3}, n \geq 3$ が生み出す数列 T_n について，代数的アプローチを使って閉じた計算式を求めてみる．

ベクトル $\begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_{n-2} \\ T_{n-3} \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_{n-2} \\ T_{n-3} \end{pmatrix}$ との関係を表わす行列Aは，

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

で与えられる．

$$\begin{pmatrix} T_n \\ T_{n-1} \\ T_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ T_{n-2} \\ T_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-2} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \\ T_0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

が容易にわかるから，あとはフィボナッチ数列の場合とまったく同様にして閉じた計算式が得られる．

フィボナッチ数列には“神がかり”とでも評するしかない熱狂的なファンが多い[5]．ここで取り上げた閉じた計算式についても「整数の足し算だけで生み出される数列を表わすために根号まで現れている．これは奇跡だ．」などと堂々と述べている書物やホームページまである．

しかし，以上で説明してきたように，再帰的に定義される数列の一般項の閉じた表示を求める問題は，初等的に解くことのできる問題であり，神秘的なものなどどこにも存在しない．この小文が教育場面で役に立てば幸いである．

参考文献

１）Euler, L., 高瀬正仁訳：オイラーの無限解析，海鳴社 (2001)
２）結城浩：数学ガール，ソフトバンククリエイティブ (2007)
３）砂田利一：行列と行列式１，岩波講座現代数学への入門，岩波書店 (1995)
４）Johnson, R.C. : Matrix methods for Fibonacci and related sequences, http://www.dur.ac.uk/bob.johnson/.bonacci/
５）Simanek, D.E. : Fibonacci Flim−Flam, http://www.lhup.edu/ dsimanek/home.htm