

〈研究ノート〉

静的離散選択モデルの構造推定（サーベイ論文）

楠田 康之*

要 旨

本稿では、消費者が財を1つのみ選択して購入する静的離散選択モデルの構造推定について考える。具体的には、Berry et al. (1995) (BLP) が提示した需要関数の推定方法について概説することにする。まず、基本モデルとしてランダム係数モデルを説明し、その推定法について考える。推定のためのアルゴリズムとして、「BLP アルゴリズム」と「MPEC アルゴリズム」の2つを考え、シミュレーションを行い、その2つのアルゴリズムを比較する。次に、BLP モデルのフルモデルを考えるために、所得効果、供給サイドを含んだいくつかの拡張を行い、「ネステッドロジット型モデル」について説明する。さらに、経済学上の応用として3つのモデルについても説明する。

キーワード：静的離散選択モデル、BLP モデル、ランダム係数モデル、需要の価格弾力性、推定アルゴリズム、モンテカルロ・シミュレーション

1 はじめに

本稿では、消費者が財を1つのみ選択して購入する静的離散選択モデルの構造推定について考える。具体的には、Berry et al. (1995) (以下、BLP) が提示した需要関数の推定方法について概説することにする。BLP は、構造推定アプローチを用いた分析として産業組織論の中でとても重要な研究であり、消費者や企業の行動理論に極めて強く依拠するとともに、データをうまく扱って実証分析ができるようにした“実用可能な”アプローチと言えるだろう。この節では、BLP モデルの説明に入る前に、少々回りくどいが、需要関数の分析について、その問題点を考えてみたい。

1.1 需要関数の推定

まず、もっとも単純な需要関数の推定を考えてみよう。いくつかの財の価格、販売量、その他の観察可能なデータより、われわれは、ある財の価格の変化がその財の販売量に与える影響（自己価格弾力性 (own price elasticity)）や、他の財の販売量に与える影響（交差価格弾力性

* 日本福祉大学経済学部 E-mail: kusuda@n-fukushi.ac.jp
URL: <https://handy.n-fukushi.ac.jp/pub/kusuda/>

(cross price elasticity))を知りたいとする。一般に、われわれが観察することができるデータは、市場単位の「集計的な」データである。つまり、ある市場（市町村、都道府県など）の中で、ある財 X がいくらの価格で販売され、どれだけの量が販売されたかという情報を知るのみである。では、そのような集計的な価格と販売量のデータを使った推定より、正しい影響を求めることが可能であろうか？

ここで、1つの問題として、需要と供給の分析に起こりうる同時性の問題が考えられる。つまり、価格と誤差項は供給サイドの中の関係より相関しており、需要関数だけを求めることは難しい。もう1つ考えなければならない問題は、このような市場単位のデータの分析は、消費者の同質性を仮定しなければならないということである。しかし、実際は、各々の消費者はそれぞれの財に対して異なる嗜好を持っており、集計的なデータは少ない情報しか与えてくれない。

では、仮に集計的なデータではなく、消費者個人ごとのデータが得られたとしてみよう。そのデータに年齢や所得水準などの消費者特有の属性（デモグラフィック）が含まれるならば、個人ごとの販売量を価格と消費者の属性によって推定することは可能かもしれない。しかし、そのようなデータによる推定値が好ましい性質を持つためには、十分なサイズのサンプルを大規模な調査によって適切に抽出しなければならない。さらに、各財の間関係を考えれば、問題はさらに複雑となる。例えば、互いに競合する100個の財を分析するために、100本の需要関数の推定式が必要となり、合計で10,000個の弾力性を求める必要があるが、そのような複雑な推定を行うことはまったく現実的ではない。そこで、集計的なデータを用いて、上の問題を解決する1つの方法がBLPの提示した方法である。つまり、われわれは推定方法を考えなおし、単純な需要関数を推定するのではなく、消費者効用から議論を始める必要がある。

1.2 BLPモデル

BLP（そして、Berry（1994）も）は、上で考えたような単純な需要関数の推定に代わる新しい手法を提案した。それは、消費者の属性と財の特性を含む離散選択モデルより、財の市場シェアを計算して需要を推定するというアイデアである¹。財をいくつかの特性の組み合わせとして考えるアイデアは、Lancaster（1971）までさかのぼることができる²。BLPの手法は、McFadden（1973）などの離散選択モデルに関する膨大な研究を土台として、複雑な確率の計算にもとづく需要関数の理論的なフレームワークを考え、集計的なデータがそのような消費者行動にもとづいているという前提のもとで、いわば理論とデータをつきあわせながら構成要素を推定するという構造推定アプローチである。このモデルは、需要関数の推定分析に多くの影響を与えたモデルであり、執筆者の頭文字をとって**BLPモデル**と呼ばれている。このモデルを用いれば、

1 本稿では、「属性 (attribute)」と「特性 (characteristic)」を区別している。ここでは、属性とはある物が持っている性質のことであり、特性とはその物を特徴付ける属性のことであると定義する。

2 Lancasterのアイデアは、Hendler（1975）において簡潔にまとめられている。

集計的なデータしか持っていないくても、理論的な消費者の行動を仮定することで、あるパラメータのもとでの予測される市場シェアが計算できて、その予測される市場シェアと実際の市場シェアの差を最小にすることで、パラメータを得ることができる。

BLP モデルを使う最大のメリットは、上で指摘した推定上の問題を解決できるということである。ここでは、需要関数の推定に関する問題を「BLP の基本問題」と名付けて、次のようにまとめよう。

BLP の基本問題

1. 効用関数の形を適切に定式化しなければ、もっともらしい代替パターンが得られないこと
2. 観察可能な財の特性と価格との間に相関が存在するため、内生性の問題があること
3. 消費者の行動に影響を与えていると思われる、分析者には観察不可能な財の特性をモデルに導入しなければならないこと

以下の議論では、BLP モデルがこの3つの問題をいかに解決しているかについて、特に注意して考えていく。

BLP モデルの1つの特徴は、消費者の嗜好がタイプ I 型極値分布にしたがうと仮定していることである。BLP によると、Bresnahan (1987) のように、消費者の嗜好を一様分布で仮定している先行研究は存在したが、消費者の嗜好に関する分布を特定することで、ロジット型モデルを拡張したモデルとして市場シェアを計算することが可能となっている。また、このモデルはロジット型モデルと違って、推定される需要関数の代替パターンに大きな制約を与えることがなく、より現実的な消費者の行動を描写していると言えよう。BLP モデルは、需要の推定に関する豊富な内容を含んでいるが、それがやや広範囲で複雑な印象を与えている。Nevo (2000) とその付録は、BLP の「解説書」として BLP モデルを推定するアルゴリズムをより明確化し、このモデルを使う研究者の助けとなっている³。本稿でも、基本的には Nevo (2000) とその付録にしたがったアルゴリズムを提示する⁴。

以下、本稿では、BLP のモデルを基本として次のように議論していこう。まず、第2節では基本モデルを説明する。基本モデルとしては「ランダム係数モデル」を用いるが、なぜこのモデルでなければならないのかを明確にするために、まず、消費者が同質的な場合の「ロジット型モデル」を説明し、その上で、「無関係な選択対象からの独立性」を回避するために、ランダム係数モデルを考える。そして、このランダム係数モデルによる市場シェアを計算する。次に、第3節で、基本モデルの推定法について考える。推定のためのアルゴリズムとして、「BLP アルゴリ

3 http://faculty.wcas.northwestern.edu/~ane686/supplements/Ras_guide_appendix.pdf

4 BLP モデルの概要をまとめた解説は、他にも Davis and Garcés (2010), Akerberg et al. (2007) などがある。

ズム」と「MPEC アルゴリズム」の2つを考え、第4節で、シミュレーションを行い、その2つのアルゴリズムを比較する。第5節で BLP モデル（フルモデル）を考えるために、所得効果、供給サイドを含んだいくつかの拡張を行う。さらに、「ネステッドロジット型モデル」について説明する。第6節で、経済学上の応用として3つのモデルについて説明し、第7節でまとめとする。

2 基本モデル

この節では、基本モデルとして「ランダム係数モデル」を考察する。このモデルでは、需要サイドのみを考え、可能な限り単純化したモデルとなっている。一般に、財に対する消費者の嗜好は個々に異なっていると考えられるため、まず、財に対する消費者の選好分布を仮定し、その分布にしたがって消費者が財を選好する確率を集計することで市場レベルの需要関数が得られる。そこで問題は、需要の構造パラメータを推定するためにどのような計算を行わなければならないかということである。

2.1 効用関数

ロジット型モデル

基本モデルとしてのランダム係数モデルを考える前に、もっとも単純な需要モデルとしてロジット型モデルを考えよう。ここで、ロジット型モデルとは、財の特性に対する消費者の嗜好が同質的で、個々の効用の違いがランダムな誤差項にのみ集約されているようなモデルである。

消費者 $i=1, \dots, I$ は、互いに製品差別化されている財 $j=1, \dots, J$ より1つの財を選好して消費するか、あるいは何も選択しないとする。消費者の効用の中で、各財は、財の持つ特性の組み合わせとして表される。財の特性には、誰にでも観察可能なタイプの財の特性 x_j^1, \dots, x_j^K (K 個) と、全ての消費者と企業には観察可能だが、分析を行うわれわれには観察不可能なタイプの財の特性 ξ_j (1 個) があるとする。観察可能なタイプの財の特性としては、色、サイズ、性能などを考えれば良い。観察不可能なタイプの財の特性には、財の需要に影響するような、データとして現れないあらゆる要素が含まれる。そこで、ロジット型モデルにおいて消費者 i が財 j を価格 p_j で購入することによる効用は、次のように定式化できる⁵。

$$u_{ij} = \beta^1 x_j^1 + \dots + \beta^K x_j^K - \alpha p_j + \xi_j + \varepsilon_{ij}. \quad (1)$$

つまり、各消費者は、財 j の特性 x_j^k に対して消費者共通の嗜好パラメータ β^k を持ち、価格に対してはパラメータ α を持っている。また、 ε_{ij} は消費者 i の財 j に対する攪乱項であり、 i, j に関して独立に発生する。一方、消費者が財を購入しないことを“外部財”として、 $j=0$ とする。

5 正確に言えば、(1) 式は「間接効用関数」である。所得を含む効用のモデルは、第5.1節で解説する。

そのときの効用を,

$$u_{i0} = \varepsilon_{i0} \quad (2)$$

としよう。消費者は、各財から得られる効用を比べて、 $u_{ij} \geq u_{ij'}, \forall j' \neq j$ ならば財 j を選んで購入する。すると、このモデルで、攪乱項 $\varepsilon_{ij}, j=0, \dots, J$ がそれぞれ独立にタイプ I 型極値分布 P にしたかうと仮定すれば、財 j の市場シェア s_j は、この攪乱項で積分することで次のように計算できる。

$$\begin{aligned} s_j &= \int_{\{\varepsilon_{ij}; u_{ij} \geq u_{ij'}\}} dp(\varepsilon_{ij}) \\ &= \frac{\exp(\beta^1 x_j^1 + \dots + \beta^K x_j^K - \alpha p_j + \xi_j)}{1 + \sum_{j'=1}^J \exp(\beta^1 x_{j'}^1 + \dots + \beta^K x_{j'}^K - \alpha p_{j'} + \xi_{j'})} \end{aligned} \quad (3)$$

一方、財を購入しない消費者の割合は、

$$s_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\beta^1 x_j^1 + \dots + \beta^K x_j^K - \alpha p_j + \xi_j)} \quad (4)$$

なので、ロジット型モデルでは、次のような推定式によって、パラメータ $\beta^1, \dots, \beta^K, \alpha$ を推定できる。

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \beta^1 x_j^1 + \dots + \beta^K x_j^K - \alpha p_j + \xi_j, \quad j=1, \dots, J. \quad (5)$$

ここで、 ξ_j は誤差項と見なされている。

このように、ロジット型モデルではパラメータ $\beta^1, \dots, \beta^K, \alpha$ が消費者間で共通であるので、市場シェア、財の特性、価格のデータが観察できれば、 j の確率分布に関して適当な仮定を置くことで (5) 式より推定が可能となる。しかし、パラメータが共通であるということは、現実の消費者の嗜好が多様的であることを考えると、とても問題が多いものである。なぜならば、任意の 2 つの財の交差価格弾力性がそれらの財の市場シェアのみによって決定されることになり、他の財の影響をまったく受けないということになるからである。この性質は、無関係な選択対象からの独立性 (independence of irrelevant alternatives, IIA) と呼ばれる問題であり、消費者の効用に強い制約を課すことによって非現実的な代替パターンを導いてしまうということになってしまう。

このことを確認するために、財の自己価格弾力性と交差価格弾力性を計算すると、それぞれ

$$\frac{\partial \ln(s_j)}{\partial \ln(p_j)} = -\alpha p_j (1 - s_j), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \ln(s_j)}{\partial \ln(p_k)} = \alpha p_k s_k, \quad k \neq j \quad (7)$$

となる。このように、自己価格弾力性は自分の価格と比例的に決定することになり、交差価格弾力性は相手の価格とのみ比例関係になっている。ここで、この交差価格弾力性 (つまり、財 j と

財 k の代替パターン) は、価格が変わらないとすれば、その 2 財の市場シェアのみによって固定されることになり、第 3 の財の市場シェアの変化の影響をまったく受けない。これは、それぞれの財の特性の「近さ」が様々であるならば現実的ではない。例えば、財 k よりも財 j により近いタイプの財 l の価格が上昇した場合、財 j はより大きく財 l から代替されるはずであり、財 j の p_k に対する弾力性はやはりより大きくなるはずである。(付録 A で、Train (2009) にしたがって、無関係な選択対象からの独立性を説明した。)

このような問題が生じる理由は、消費者の効用が財の特性によって決定される $\beta^1 x_j^1 + \dots + \beta^K x_j^K - \alpha p_j + \xi_j$ の項と、消費者の特性を表す攪乱項 ε_{ij} が加法分離的な関係になっており、財の特性に対する消費者の嗜好の差異を捨象していることにある。つまり、より現実的な消費者の選択を考えるためには、財の特性に関するパラメータ β^k が消費者個々に異なっている必要があるということになる。次に説明するランダム係数モデルは、この問題を解決するためのモデルである。

ランダム係数モデル

上のロジット型モデルを修正して、個々の消費者の嗜好を反映したモデルを考えるために、消費者の効用関数を次のように定式化しよう。

$$u_{ij} = \beta_i^1 x_j^1 + \dots + \beta_i^K x_j^K - \alpha p_j + \xi_j + \varepsilon_{ij}. \quad (8)$$

ここで、この効用関数が (1) 式と違うところは、観察可能な財の特性に対する消費者の嗜好のパラメータ $\beta_i^1, \dots, \beta_i^K$ が消費者 i ごとに異なるという点である。つまり、「消費者は財の特性 x^1, \dots, x^K に対して異なる限界効用を持つ」ことになる。このようなモデルは、ランダム係数モデル (random coefficient model) と呼ばれる。

ランダム係数モデルはロジット型モデルよりもよく現実を表したものではあるが、上のロジット型モデルの (3) 式のように簡単な形に積分することはできない。そこで、以下の計算を容易にするために、財の特性に対する消費者のパラメータ $\beta_i^1, \dots, \beta_i^K$ に関して次の仮定を設けよう。

仮定

$\beta_i^k, i=1, \dots, I$ は互いに独立な確率変数で、それぞれ、平均 $\bar{\beta}^k$ 、標準偏差 σ^k の正規分布にしたがう ($k=1, \dots, K$)。

つまり、われわれは個々の消費者に関するデータを観察することができないので、各市場ごとに消費者の属性の分布を想定し、各消費者の嗜好もその分布にしたがうと考えるのである。ここでは消費者の属性を直接には考えないが、第 5.1 節で、具体的な消費者の属性 (性別、年齢など) を含む拡張的なモデルを考えることにする。

さて、各消費者はそれぞれ自分のパラメータ β_i^k を観察した後に、それにしたがって行動するとしよう。したがって、われわれが観察できる集計的なデータは、そのような消費者行動を反映

しているものとする。そこで、われわれの分析の目的は、「観察された集計的なデータよりパラメータ $\theta \equiv (\beta^1, \dots, \beta^K, \alpha, \sigma^1, \dots, \sigma^K)$ を推定すること」である。以下では、 $\bar{\beta} \equiv (\bar{\beta}^1, \dots, \bar{\beta}^K)$ 、 $\sigma \equiv (\sigma^1, \dots, \sigma^K)$ とする。

2.2 市場シェアの計算

次に、ランダム係数モデルの市場シェアを考える。ランダム係数モデルでは、消費者 i の財 j に対する効用を「消費者 i の特性には関係しないが財 j には関係する部分」と「それらのどちらにも関係する部分」の2つに分離することで、市場シェアは計算しやすくなる。

まず、 ν_i^k を標準正規分布にしたがう確率変数とすると、上の仮定より

$$\beta_i^k \equiv \bar{\beta}^k + \sigma^k \nu_i^k \quad (9)$$

となり、 β_i^k は消費者共通の平均的なパラメータ $\bar{\beta}^k$ と消費者 i 特有のパラメータ $\sigma^k \nu_i^k$ の2つに分離されることになる。そこで、効用関数は次のように変形される。

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \sum_{k=1}^K \beta_i^k x_j^k - \alpha p_j + \xi_j + \varepsilon_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k - \alpha p_j + \xi_j + \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_i^k + \varepsilon_{ij} \\ &\equiv \delta_j + \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $\delta_j \equiv \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k - \alpha p_j + \xi_j$ 、 $\mu_{ij} \equiv \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_i^k$ である。このように、消費者 i の財 j に対する効用を、消費者 i の嗜好には関係しないが財 j には関係する部分 (δ_j) と、それらのどちらにも関係する部分 (μ_{ij} , ε_{ij}) に分離できた。以下では、 $\delta \equiv (\delta_1, \dots, \delta_J)$ 、 $\mu \equiv (\mu_{ij})_{i=1, \dots, I; j=1, \dots, J}$ と表すことにする。ここで、 $\nu_i \equiv (\nu_i^1, \dots, \nu_i^K)$ が標準正規分布 $F(\nu_i)$ にしたがうとし、 $F(\nu)$ をその積としよう ($\nu \equiv (\nu_1, \dots, \nu_I)$)。すると、ここでも ε_{ij} がそれぞれ独立にタイプ I 型極値分布にしたがうと仮定すれば、ランダム係数モデルでは、財 j の市場シェアは次のようになる。

$$s_j(\delta, \mu) = \int_{\nu} \frac{\exp(\delta_j + \mu_{ij})}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\delta_j + \mu_{ij})} dF(\nu). \quad (11)$$

つまり、ランダム係数モデルの市場シェアは、ロジット型モデルの市場シェアを消費者の嗜好に関するランダム変数 ν_i^k によって積分したものと見なすことができる。また、この値は、 δ 、 μ に依存していることに注意しておこう。

(11) 式の市場シェアは積分の形であるが、ロジット型モデルの場合と違って、この積分を解析的に解くことは困難である。そこで、無作為抽出 (random sampling) による数値計算によって、この値を求めるアプローチをとる。つまり、 $F(\nu_i)$ より N 回サンプルをランダムに抽出して ν_1, \dots, ν_N とし、(11) 式の被積分項の標本平均を求めることにする。すると、数値計算上の市場シェアは、

$$\hat{s}_j(\hat{\delta}, \hat{\mu}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\exp(\delta_j + \hat{\mu}_{nj})}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\delta_j + \hat{\mu}_{nj})} \quad (12)$$

となる。ただし、 $\hat{\mu}_{nj} \equiv \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_n^k$ 、 $\hat{\mu} \equiv (\hat{\mu}_{ij})_{n=1, \dots, N; j=1, \dots, J}$ とする。(12) 式を j でまとめたものを $\hat{s}(\hat{\delta}, \hat{\mu})$ で表し、予測される市場シェア (predicted market share) と呼ぶことにしよう。以下では、この予測される市場シェアを推定に用いることになる。

推定アルゴリズムの議論に入る前に、ロジット型モデルで生じた代替パターンの問題について検討しておこう。ランダム係数モデルでの自己価格弾力性と交差価格弾力性は、それぞれ、

$$\frac{\partial \ln(s_j)}{\partial \ln(p_j)} = -\frac{p_j}{s_j} \int_{\nu} \alpha s_{ij} (1 - s_{ij}) dF(\nu), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \ln(s_j)}{\partial \ln(p_k)} = \frac{p_k}{s_k} \int_{\nu} \alpha s_{ij} s_{ik} dF(\nu) \quad (14)$$

となる。それぞれの被積分項は、各消費者がその財を購入する確率であり、その確率は財の特性に依存する。したがって、各消費者の嗜好を通じて財間の特性の「近さ」が含まれていることになり、ある財の価格の変化による影響は、その「近さ」によって異なることになる。

3 推定アルゴリズム

3.1 推定における問題点

ここからは、ランダム係数モデルにおいて、パラメータ θ を求める推定アルゴリズムについて考えていこう。

まず、各市場ごとにわれわれが観察できるデータは、 $Data = \{(x_j^k, z_j^d, p_j, S_j) : j=1, \dots, J; k=1, \dots, K; d=1, \dots, D\}$ である。ただし、 x_j^k は財 j の特性、 z_j^d は財 j に関する操作変数（第 3.4 節で詳しく述べる）、 p_j は財 j の価格、 S_j は財 j の市場シェアである⁶。ここで、上で計算した予測される市場シェアと区別するために、 S_j を観察された市場シェア (observed market share) と呼ぼう。これらのデータは全て集計的なデータなので、個人の行動に関してはもっともな仮定を設けて理論的に考え、その計算結果とデータをつき合わせてもっともらしい推定値を求めるのがこの構造推定のポイントとなる。

さて、観察された市場シェア $S = (S_1, \dots, S_J)$ が与えられたら、ある θ のもとので、

$$s(\delta, \mu) = S \quad (15)$$

が理論的には成り立っていないなければならない。ただし、 $s(\delta, \mu)$ は、(11) 式を j でまとめたものである。そこで、(15) 式を、標本平均を用いて

6 ここからは、全ての財は同一の財の特性の集合を持つとする。つまり、任意の財 j に対して x_j^k , $k=1, \dots, K$ が存在するとする。

$$\hat{s}(\hat{\delta}, \hat{\mu}) = S \tag{16}$$

に置き換えて、できるだけこの式を満たすような（つまり、この2つの市場シェアの差ができるだけ小さくなるような）パラメータを求めることを目指したい。

ここで、推定に関する2つの困難な問題点が存在する。もし、(16)式を誤差項 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_J)$ について解き、それを θ に関する明示的な関数（explicit function）の形で表すことができるならば、（後述する）GMM などを用いて θ を推定することは可能かもしれない。ところが、 $\hat{s}(\hat{\delta}, \hat{\mu})$ の形状より ξ を解析的に計算するのは不可能である。これが、このランダム係数モデルの推定における1つの問題点である。そこで、 ξ を求めるために、まず、(16)式を満たすような δ の値を求めて、それより ξ の関数形を求めるとする。ところが、そのようにして求めた δ の値は $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^K)$ に依存しており、異なる σ ごとに誤差項 ξ の関数形も異なる。これがもう1つの問題点である。したがって、これらの問題点を解決するような推定アルゴリズムを考えなければならない。

そこで、ここでは、数値計算で(16)式を計算してそれによって推定式を作り推定する方法と、制約付き最適化問題としてソルバーによって解く方法の2つを考えよう。ここでは、これらをそれぞれ、「BLP アルゴリズム」、「制約付き最適化アルゴリズム」と便宜的に呼ぶことにしよう。

3.2 BLP アルゴリズム

BLP は、推定の方法について詳細な記述を残しているが、Nevo (2000) の付録は、その方法を簡潔に整理してまとめている。以下では、Nevo (2000) の付録に依拠しながら、BLP モデルを推定するアルゴリズムを考える。ここで **BLP アルゴリズム** とは、ある構造パラメータのもとで、解析的に計算が困難な計算を逐次的に数値計算によって求めて一部のパラメータを推定し（**内部ループ**）、その数値計算の結果によって、推定のための目的関数を定式化して残りのパラメータを推定する（**外部ループ**）、という過程を入れ子的に行うアルゴリズムである⁷。

まず、推定すべきパラメータ θ を、 $(\bar{\beta}, \alpha)$ と σ の2つに分ける。ここで、定義より、 δ は $(\bar{\beta}, \alpha)$ のみに依存し、 $\hat{\mu}$ は σ のみに依存していることに注意しておこう。

この推定アルゴリズムのポイントは、次のようにまとめられる。パラメータを推定するために後述する GMM を使いたいが、それには、GMM 目的関数を定式化するための誤差項ベクトル（**error term vector**）をパラメータの関数の形で求めておく必要がある⁸。パラメータ $(\bar{\beta}, \alpha)$ と σ に関する誤差項ベクトルをそれぞれ $\xi(\bar{\beta}, \alpha)$ 、 $\hat{\xi}(\sigma)$ としよう。推定アルゴリズムでは、 σ を所与として $\xi(\bar{\beta}, \alpha)$ を求め、 $(\bar{\beta}, \alpha)$ を所与として $\hat{\xi}(\sigma)$ を求めることになる。

7 ここでは、「内部ループ」「外部ループ」という言葉を使うが、これは本稿での便宜上の用語である。

8 例えば、単純な線形モデル $y = X\beta + \varepsilon$ の場合は、 $\varepsilon(\beta) = y - X\beta$ を誤差項ベクトルとすればよい。

以下の手順は、ステップ1からステップ4に分けて説明する⁹。

ステップ1 ある σ を固定して、予測される市場シェアを計算する。

第2.2節で説明したように、財の特性 k ごとに、確率分布 F より N 個の v_n^k を無作為抽出する。所与の σ に対して $\hat{\mu}_{nj} \equiv \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k v_n^k$ を計算して、(12)式より予測される市場シェア $s(\delta, \hat{\mu})$ を定式化する。

ステップ2 σ を固定したままで、予測される市場シェアと観察された市場シェアを等しくするような δ を計算する。

ステップ1で計算した予測される市場シェアを使って(16)式を満たすような δ を計算する。しかし、(16)式を解析的に解くのは不可能なので、数値計算で逐次的に δ を求めていく。次のような漸化式を考えよう。

$$\delta^{(\kappa+1)} = \delta^{(\kappa)} + \ln S - \ln s(\delta^{(\kappa)}, \hat{\mu}), \quad \kappa=0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

ここで、この式は縮小写像（contraction mapping）であるので、この更新の繰り返しによって一意的に収束して不動点が求まる¹⁰。そこで、適当な初期値から始めて、適当なノルムと収束条件を決めて $\|\delta^{(\kappa+1)} - \delta^{(\kappa)}\| < \epsilon$ となったら収束とみなす。この不動点を δ^* とすると、 $\delta_j^* \equiv \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k - \alpha p_j + \xi_j$ 、つまり、 $\xi_j \equiv -\sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \alpha p_j + \delta_j^*$ である（ $j=1, \dots, J$ ）。これを j でまとめたものを、誤差項ベクトルとして $\xi(\bar{\beta}, \alpha)$ で表す。ここで、この誤差項ベクトルは σ に依存していることに留意しておこう。

ステップ3 推定のための目的関数を定式化し、パラメータ $(\bar{\beta}, \alpha)$ を推定する。

このステップでは、パラメータ $(\bar{\beta}, \alpha)$ をGMMによって推定するために、GMM目的関数 $Q(\xi(\bar{\beta}, \alpha))$ を次のように定義する。

$$Q(\xi(\bar{\beta}, \alpha)) \equiv m(\xi(\bar{\beta}, \alpha))' W m(\xi(\bar{\beta}, \alpha)). \quad (18)$$

ここで、 $m(\xi(\bar{\beta}, \alpha))$ はモーメント（積率）、 W はウエイト行列である。（これらについては、第3.4節で詳述する。）この $Q(\xi(\bar{\beta}, \alpha))$ を最小化するような $(\bar{\beta}, \alpha)$ を求めて、 $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ とする¹¹。

9 Nevo (2000) の付録では、ステップ0からステップ4に分けている。ステップ0は無作為抽出によるランダム変数の準備であるので以下では省略した。また、ステップ3とステップ4を変更している。

10 縮小写像については、Stokey and Lucas (1989) を参照。

11 一方、Nevo (2000) の付録では、GMMを使わずとも $(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) = (X'ZWZ'X)^{-1} X'ZWZ' \delta^*$ で計算できることを指摘している。（ただし、 X は説明変数の行列、 Z は操作変数の行列。）これは、 $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ が目的関数の中で線形であることによる。

ステップ4 新しい目的関数を定式化し、パラメータ σ を推定する。

最後に、パラメータ σ を推定する。 σ は非線形の目的関数を考えなければならず、計算は容易ではない。 Nevo (2000) は、準ニュートン法による計算を考えているが、複雑なヘッセ行列を計算しておかなければならない。そこで、ここでは Dubé et al. (2012) のアイデアを援用して、次のような推定を考える。まず、ステップ3で得られた $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ と任意の ξ に対して、予測される市場シェアを次のように書くことにしよう¹²。

$$\hat{s}_j(\xi; \sigma) \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\exp(\hat{\delta}_j + \hat{\mu}_{nj})}{1 + \sum_{j=1}^J \exp(\hat{\delta}_j + \hat{\mu}_{nj})}. \quad (19)$$

ここで、 $\hat{\delta}_j \equiv \sum_{k=1}^K \hat{\beta}^k x_j^k - \hat{\alpha} p_j + \xi_j$ である ($j=1, \dots, J$)。つまり、(19) 式は、(12) 式に $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ を代入したものである。次に、Dubé et al. (2012) の (5) 式にしたがい、次のような縮小写像を定義しよう。

$$\xi^{(h+1)} = \xi^{(h)} + \ln S - \ln(\hat{s}(\xi^{(h)}; \sigma)). \quad (20)$$

適当な初期値から始めて、この更新の繰り返しを行い、適当な ϵ に対して $\|\xi^{(h+1)} - \xi^{(h)}\| < \epsilon$ になったら収束とみなし、そのときの $\xi^{(h)}$ を ξ^* としよう。 σ に対する誤差項ベクトルは、次のように定義される¹³。

$$\hat{\xi}(\sigma) \equiv \xi^* + \ln S - \ln(\hat{s}(\xi^*; \sigma)). \quad (21)$$

新しいGMM 目的関数は、この誤差項ベクトルを用いて

$$\hat{Q}(\hat{\xi}(\sigma)) \equiv m(\hat{\xi}(\sigma))' W m(\hat{\xi}(\sigma)) \quad (22)$$

と定式化される。この $\hat{Q}(\hat{\xi}(\sigma))$ を最小化するような σ を $\hat{\sigma}$ とする。

ステップ4で求めた $\hat{\sigma}$ を新しい σ として、ステップ1に戻り、(18) 式と (22) 式が十分小さくなるまで以上のステップを繰り返して、パラメータ β, α, σ の推定値を求める。

以上の4つのステップにより、BLP アルゴリズムは次のようにまとめられる。

12 ここで、 \hat{s}_j をあえて ξ と σ の関数と表記しているのは単に「記号の濫用」であり、実際は (12) 式と同じものを表している。

13 ただし、この $\hat{\xi}(\sigma)$ は、収束条件 ϵ の大きさに依存していることに注意する必要がある。これにより、GMM 推定量はバイアスを含むことになる。Dubé et al. (2012) は、このGMM 推定量 (つまり、 $\hat{\theta}(\epsilon)$) の性質について詳細な分析を行っている。

BLPアルゴリズム

内部ループ ある σ を所与として，(12) 式を定式化し（ステップ 1），(17) 式を用いて $\|\hat{\delta}^{(k+1)} - \hat{\delta}^{(k)}\| < \epsilon$ を満たすような $\hat{\delta}^*$ を求め，それにより $\xi(\bar{\beta}, \alpha)$ を計算する（ステップ 2）．それより目的関数 (18) 式を定式化し，次のようにパラメータ $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ を推定する（ステップ 3）．

$$(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) = \arg \min_{(\bar{\beta}, \alpha)} Q(\xi(\bar{\beta}, \alpha)). \quad (23)$$

外部ループ 内部ループで推定した $(\hat{\beta}, \hat{\alpha})$ を所与として，(19) 式を定式化し，(20) 式を用いて $\|\hat{\xi}^{(h+1)} - \hat{\xi}^{(h)}\| < \epsilon$ を満たすような $\hat{\xi}^*$ を求めて目的関数 (22) 式を計算し，次のようにして $\hat{\sigma}$ を推定する（ステップ 4）．

$$\hat{\sigma} = \arg \min_{\sigma} \hat{Q}(\hat{\xi}(\sigma)). \quad (24)$$

この内部ループと外部ループを繰り返して，目的関数が十分に小さくなったらパラメータを推定値とする．

3.3 制約付き最適化アルゴリズム (MPEC)

BLP アルゴリズムはわかりやすいが，ステップ 2 において δ ，ステップ 4 において ξ が収束するまで繰り返し計算する必要がある，サンプルサイズが大きい場合は特に時間がかかる．Dubé et al. (2012) は，問題を 1 回のみ解くことで推定を行う方法を提示した．本稿では，それを制約付き最適化アルゴリズム (MPEC) と呼ぼう．このアルゴリズムは，楠田 (2018a) と楠田 (2018b) の動的離散選択モデルにおいて説明したものと同様のものである (Su and Judd, 2012)．このアルゴリズムのアイデアとは，(16) 式を ξ について解くのではなく，そのまま制約式として使う，ということである．つまり，推定される θ は (16) 式を満たさなければならないので，推定は， θ と ξ を変数とする次のような制約付き最適化問題として定式化できる．

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \xi} \quad & m(\xi)' Wm(\xi) \\ \text{subject to:} \quad & \hat{s}(\hat{\sigma}, \hat{\mu}) = S, \\ & \xi_j = \delta_j - \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \alpha p_j, \quad j=1, \dots, J, \\ & \hat{\mu}_{nj} = \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_n^k, \quad n=1, \dots, N; j=1, \dots, J. \end{aligned} \quad (25)$$

つまり，BLP アルゴリズムと MPEC アルゴリズムは，問題の設定としては基本的に同じものである．これらのアルゴリズムの違いは，BLP アルゴリズムが数値計算によって (17) 式の制約式を解いてから目的関数を最小化するのに対し，このアルゴリズムは，1 つの最適化問題として

定式化しているということである。しかし、一般に、MPEC アルゴリズムを使って推定するには、この制約付き最適化問題を解くことができるプログラム言語および信頼できるソルバーが必要となる。

3.4 操作変数と GMM について

価格の内生性

ここで、上の 2 つのアルゴリズムで用いている目的関数に関して、操作変数とモーメントについて考えよう。第 1 節で述べたように、基本問題の 1 つとして、推定においては価格の内生性を考慮しなければならない。なぜならば、価格は財の特性と相関しているはずだからである。よって、財の特性と価格の両方を推定式に含むようなこのモデルを推定するためには、財 j に対して $E[\xi_j | z_j] = 0$ かつ $E[p_j | z_j] \neq 0$ となるような操作変数 (instrument variable) z_j を考えなければならない。

ここからは、サンプルとして市場 $t=1, \dots, T$ を考え、単純化のために、全ての市場において財 $j=1, \dots, J$ が販売されており、データとして $Data = \{(x_{tj}^k, z_{tj}^d, p_{tj}, S_{tj}) : j=1, \dots, J; k=1, \dots, K; d=1, \dots, D; t=1, \dots, T\}$ が観察できると仮定しよう。このようなデータより、(18)、(22)、(25) 式の目的関数を具体的に考える。

まず、市場 t の財 j に対して D 個の操作変数 $z_{tj}^1, \dots, z_{tj}^D$ が観察できるとしよう。すると、この操作変数を使った標本モーメント (sample moments) $m(\hat{\xi}(\theta)) = (m_1(\hat{\xi}(\theta)), \dots, m_D(\hat{\xi}(\theta)))'$ は

$$m_d(\hat{\xi}(\theta)) \equiv \frac{1}{TJ} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \xi_{tj}(\theta) \cdot z_{tj}^d, \quad d=1, \dots, D \quad (26)$$

と定義される。これは、直交条件 (orthogonality condition) $E[\xi_j z_j^d] = 0$ の左辺を標本平均で置き換えたものである。

一般化モーメント法 (generalized method of moments, GMM) とは、このような標本モーメント $m(\hat{\xi}(\theta))$ より GMM 目的関数 (GMM objective function) $Q(\hat{\xi}(\theta)) = m(\hat{\xi}(\theta))' W m(\hat{\xi}(\theta))$ を作り、これを最小化するようなパラメータ θ を求める方法である¹⁴。ここで、ウエイト行列 (weighting matrix) W は、分散を小さくするために重みづけをするための行列であり、モーメントの分散共分散行列 $m(\hat{\xi})m(\hat{\xi})'$ の一致推定量の逆行列が使われる。しかし、この行列には未知の誤差 ξ が含まれるため、第 1 段階で W を単位行列として目的関数を最小化して誤差の推定値 $\hat{\xi}$ を求め、これより $m(\hat{\xi})m(\hat{\xi})'$ を計算し、この逆行列 \hat{W} をウエイト行列として第 2 段階の推定を行うのが一般的なようである (「2 段階 GMM」)¹⁵。

14 GMM の詳細な解説については、Cameron and Trivedi (2005), Greene (2011), Hayashi (2000), Wooldridge (2002), 蓑谷 (2007) など多数。

15 さらに、このような仮定を繰り返し行う方法 (「繰り返し GMM」) もある。

より一般的には、標本モーメントを作るベクトルとして様々な変数の組み合わせが使われる。第4節のシミュレーションでは、定数項、外生変数、操作変数のベクトルを

$$(\mathbf{h}^1, \dots, \mathbf{h}^L) \equiv (1, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{X}^K, \mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^D) \quad (27)$$

として ($L=1+K+D$),

$$m_\ell(\xi(\theta)) \equiv \frac{1}{TJ} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \xi_{tj}(\theta) \cdot h_{tj}^\ell, \quad \ell=1, \dots, L \quad (28)$$

を使うことにする。ただし、 $\mathbf{h}^\ell = (h_{tj}^\ell)_{t=1, \dots, T; j=1, \dots, J}$, $\mathbf{x}^k = (x_{tj}^k)_{t=1, \dots, T; j=1, \dots, J}$, $\mathbf{z}^d = (z_{tj}^d)_{t=1, \dots, T; j=1, \dots, J}$ とする。したがって、この場合の $\mathbf{m}(\xi(\theta))$ は $(L \times 1)$ ベクトル、 \mathbf{W} は $(L \times L)$ 行列となる。

操作変数の選択

操作変数としてどのようなものを選択すべきかということは、とても大きな問題である。BLP は、寡占市場のゲームに関して以下のような操作変数を提案している。まず、財 j の操作変数の中には、その財の特性（外生変数）が含まれている。次に、同じ企業が生産する他の財 $j' \neq j$ と、その企業は生産していないがライバル企業が生産している財 $j' \neq j$ も操作変数として使える。なぜならば、財の特性は、財の間の「近さ」を表しているため、強い代替性の財に対しては低いマークアップ率をもたらして低い価格水準となり、逆に他の財の価格水準は高くなるはずだからである。BLP は、企業 f が生産する財 j の k 番目の特性に対して、次の3種類の操作変数を考えている。

x_j^k : 企業 f が生産する財 j の k 番目の特性自身

$\sum_{j' \neq j, j' \in J_f} x_{j'}^k$: 企業 f が生産する j 以外の財の k 番目の特性の総和

$\sum_{j' \neq j, j' \notin J_f} x_{j'}^k$: f 以外の企業が生産する j 以外の財の k 番目の特性の総和

さらに、 \mathbf{z}^d と \mathbf{x}^k により多次元の操作変数を考えることもできる。Dubé et al. (2012) は、操作変数として、 z_j^d , その2乗および3乗, x_j^k , その2乗および3乗, $\prod_{d=1}^D z_j^d$, $\prod_{k=1}^K x_j^k$, $(z_j^d \cdot x_j^1)$, $(z_j^d \cdot x_j^2)$ を考えている（定数項を含めて42個）。

4 モンテカルロ・シミュレーション

上で説明した2つのアルゴリズムを比較するために、モンテカルロ・シミュレーションを行う。この推定では、単純化のため σ は既知とし、 $(\bar{\beta}, \alpha)$ のみを推定する。（つまり、BLP アルゴリ

ズムにおいては内部ループのみを行う。) この節では、この推定したいパラメータを $\theta \equiv (\bar{\beta}, \alpha)$ で表そう。モデルの設定としては、主として Dubé et al. (2012) にしたがって、BLP, MPEC の 2 つのアルゴリズムを順に説明する。

4.1 データの作成

市場 $t=1, \dots, T$ において財 $j=1, \dots, J$ が販売されているとする。各財は、特性 $k=1, \dots, K$ を持っている。ここでは、 $T=50, J=25, K=3$ としよう。推定に使うデータは全て人工的に乱数を発生させて作成する。

まず、Dubé et al. (2012) にしたがって、観察できる財の特性 x_j^k を次のように生成しよう¹⁶。

$$\begin{bmatrix} x_j^1 \\ x_j^2 \\ x_j^3 \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.3 \\ -0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad (29)$$

ただし、 x_j^k は各市場で共通とする ($x_{tj}^k = x_j^k, \forall t$)。観察不可能な財の特性 ξ_{tj} は平均 0、標準偏差 η (後述) の正規分布にしたがうとし、価格 p_{tj} は次のように生成する。

$$p_{tj} = \left| 0.5 \cdot \xi_{tj} + e_{tj} + 1.1 \cdot \sum_{k=1}^3 x_{tj}^k \right|. \quad (30)$$

ただし、 e_{tj} は“価格シフター”で、やはり正規分布にしたがうとする。一方、操作変数を $z_{tj}^d, d=1, \dots, 6$ とし、

$$z_{tj}^d = u + \frac{1}{4} \left(e_{tj} + 1.1 \cdot \sum_{k=1}^3 x_{tj}^k \right) \quad (31)$$

として作成する。ただし、 u は $(0, 1)$ の一様分布にしたがう確率変数である。

(後述する) ある所与の $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ のもとで、推定したいパラメータは $\theta \equiv (\bar{\beta}^0, \bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \bar{\beta}^3, -\alpha)'$ である。ただし、 $\bar{\beta}^0$ は定数項で、価格のパラメータは $-\alpha$ として正の値をとるようにする。ここでは、真のパラメータの値を、 $(\bar{\beta}^0, \bar{\beta}^1, \bar{\beta}^2, \bar{\beta}^3, -\alpha) = (-1.0, 1.5, 1.5, 0.5, 3.0)$ としよう。これらのパラメータにしたがって、 $(\beta_{tj}^0, \beta_{tj}^1, \beta_{tj}^2, \beta_{tj}^3)$ を N 個無作為抽出し、(12) 式にしたがって、市場シェア S_{tj} を計算する。以上、生成したデータは、 $\{x_{tj}^1, x_{tj}^2, x_{tj}^3, z_{tj}^1, z_{tj}^2, z_{tj}^3, z_{tj}^4, z_{tj}^5, z_{tj}^6, p_{tj}, S_{tj}\}$ となる。

4.2 推定アルゴリズムと推定結果

ここでは、上に述べた BLP アルゴリズムと MPEC アルゴリズムを使用し、同じデータを用いた推定結果と計算時間の比較を試みる。

まず、BLP アルゴリズムでは、ステップ 1 として、正規分布より $\nu^0, \nu^1, \nu^2, \nu^3$ を無作為抽

16 この部分のプログラムは、「多変量ガウス分布からのサンプリング」
<https://qiita.com/jhako/items/30f420033b5c126eedc1> を参考にした。

出し、(12) 式より数値計算上の市場シェアを計算する。そして、各 t ごとに初期値 $\delta_{ij}^{(0)}=0.0$ とし、(20) 式より新しい $\delta_{ij}^{(k+1)}$ を更新する。（収束条件は、 $\epsilon=0.01$ とした。）収束した $T \times J=1250$ 個の不動点を順番に縦に並べて δ^* とする。次にステップ 2 として、独立変数を $X=(\mathbf{1}, x^1, x^2, x^3, -p)$ としてまとめる。ただし、 X の各要素は $(TJ \times 1)$ ベクトルにしておく。同様に、操作変数ベクトルは $(TJ \times L)$ 行列として、 $Z=(\mathbf{1}, z^1, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, x^1, x^2, x^3)$ とする ($L=10$)。これらを用いて次のように制約付き最適化問題を定式化して、ソルバーで解く。

$$\begin{aligned} \min_{\theta} \quad & m' W m \\ \text{subject to:} \quad & m_{\ell} = \frac{1}{TJ} \sum_{q=1}^{TJ} Z_{q\ell} (\delta_q^* - X_q \theta), \quad \ell=1, \dots, L. \end{aligned} \quad (32)$$

ただし、 $m=(m_1, \dots, m_{\ell})'$ であり、 $Z_{q\ell}$ は Z の (q, ℓ) 番目の要素、 δ_q^* は δ^* の q 番目の要素、 X_q は X の q 行目である。この最適化問題では、変数が θ と m で、それぞれの数が 5 と 10 とになり、制約式の数が 10 となっている。なお、 W は $Z'Z$ の逆行列とした。

次に、MPEC アルゴリズムでは、(16) 式を制約式とする必要がある（(25) 式を参照）。しかし、 $\hat{s}(\hat{\delta}, \hat{\mu})$ をそのままソルバーで計算させるのは困難なため、市場シェアの「分母部分」はほぼ等しいものと仮定して、

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp \left(\sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k - a p_j + \xi_j + \hat{\mu}_{nj} \right) = \frac{S_j}{S_0} \quad (33)$$

を (16) 式の代わりに制約とする。そこで、 $\hat{\mu}_{nj}$ を $(TJ \times N)$ 行列にしたものを $\hat{\mu}$ 、その要素を $\hat{\mu}_{nq}$ とし、 S_{ij}/S_{i0} を縦に $(T \times J)$ 個並べたベクトルを (S/S_0) 、その要素を $(S/S_0)_q$ として、次のような制約付き最適化問題を定式化する。

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \xi} \quad & m' W m \\ \text{subject to:} \quad & m_{\ell} = \frac{1}{TJ} \sum_{q=1}^{TJ} Z_{q\ell} \delta_q, \quad \ell=1, \dots, L, \\ & \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp (X_q \theta + \xi_q + \hat{\mu}_{nq}) - (S/S_0)_q = 0, \quad q=1, \dots, TJ. \end{aligned} \quad (34)$$

この最適化問題は、変数が θ 、 m 、 ξ （それぞれ、5 個、10 個、1250 個）となり、制約式が 2 つあって、それぞれの数が 10 と 1250 となっている。

上の設定のもとで、モンテカルロ・シミュレーションを行った。推定は、 η と $(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ に設定する値によって次の 4 つのモデルに関して、それぞれのアルゴリズムに対して 100 回ずつデータを生成して行った。

$$\text{Model I:} \quad \eta=0.1; \quad (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}); \quad N=100,$$

$$\text{Model II:} \quad \eta=0.1; \quad (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}, \sqrt{0.1}); \quad N=20,$$

表1 BLP と MPEC の計算結果^a

Mode	Algorithm	True values:	$\bar{\beta}^0$ -1.0	$\bar{\beta}^1$ 1.5	$\bar{\beta}^2$ 1.5	$\bar{\beta}^3$ 0.5	α 3.0	Mean Time (in sec.)	Mean of Iteration
<i>Model I</i>	BLP	Mean	-0.996	1.512	1.498	0.495	2.999	323.24	3.09
		Std.dev.	(0.070)	(0.049)	(0.053)	(0.040)	(0.036)		
	MPEC	Mean	-1.064	1.509	1.492	0.474	3.000	19.54	
		Std.dev.	(0.086)	(0.059)	(0.057)	(0.043)	(0.047)		
<i>Model II</i>	BLP	Mean	-0.998	1.511	1.498	0.505	2.994	63.46	3.11
		Std.dev.	(0.101)	(0.117)	(0.105)	(0.104)	(0.049)		
	MPEC	Mean	-1.086	1.499	1.486	0.490	2.983	4.41	
		Std.dev.	(0.128)	(0.132)	(0.117)	(0.102)	(0.063)		
<i>Model III</i>	BLP	Mean	-0.996	1.513	1.476	0.499	3.000	410.91	5.25
		Std.dev.	(0.485)	(0.282)	(0.282)	(0.193)	(0.275)		
	MPEC	Mean	-1.484	1.470	1.439	0.431	2.973	19.37	
		Std.dev.	(0.528)	(0.358)	(0.335)	(0.225)	(0.297)		
<i>Model IV</i>	BLP	Mean	-1.039	1.468	1.505	0.503	2.994	94.97	6.42
		Std.dev.	(0.533)	(0.408)	(0.404)	(0.306)	(0.310)		
	MPEC	Mean	-1.454	1.447	1.468	0.449	2.974	4.49	
		Std.dev.	(0.589)	(0.426)	(0.403)	(0.317)	(0.348)		

a データを 100 個生成して、それぞれのデータより推定値を得た。Mean, Std. dev は、それぞれ推定値の平均と標準偏差、Mean Time は平均計算時間、Mean of Iteration は内部ループの平均回数。

$$Model III: \quad \eta=1.0; \quad (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}); \quad N=100,$$

$$Model IV: \quad \eta=1.0; \quad (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}, \sqrt{0.5}); \quad N=20.$$

推定結果を表 1 に示した。

表 1 で、*Model I* と *Model II* は、 ξ_{ij} と $(\beta_{ij}^0, \beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2, \beta_{ij}^3)$ のバラつきが小さいケースである。これらのケースでは、BLP, MPEC とも、ほぼ真の値に近い推定値が出ている。*Model I* では無作為抽出の回数 N が 100, *Model II* では 20 であるが、それにより、両アルゴリズムにおいて *Model I* の計算時間がより長くかかった。 δ^* の収束回数に関しては大きな違いは見られなかった。一方、*Model III* と *Model IV* は、 ξ_{ij} と $(\beta_{ij}^0, \beta_{ij}^1, \beta_{ij}^2, \beta_{ij}^3)$ のバラつきが大きいケースである。いずれのケースにおいても、BLP では ($\bar{\beta}^1$ を除いて) 推定値は真の値に近い。これらのことより、BLP においては、 N が 20 であってもほぼ満足する結果が出たと言える。一方、MPEC においては、両ケースとも真の値から大きく外れている。以上の実験結果を見る限り、BLP アルゴリズムを使えば、 N を小さくしてもほぼ満足いく結果が得られることを示唆している¹⁷。一方、計算時間は MPEC を使うことで大幅に短縮される。

17 ただし、このシミュレーションでは、(33) 式のように、市場シェアの分子部分だけの制約式を用いたことに留意する必要がある。MPEC の推定値が不正確なのは、このためであると考えられる。

5 基本モデルの拡張

第2節では、所得や供給サイドなどを捨象した基本モデルによって、BLPモデルとその推定アルゴリズムについて説明した。しかし、実際のBLPモデル（フルモデル）は、そのような捨象した問題を含んでいる。そこで、この節では、基本モデルについて拡張を行う。

5.1 所得効果と消費者の属性

所得効果

基本モデルの効用関数（(8)式）には消費者の所得水準が入っていなかったが、実際の消費者の効用の中に消費者の特性の1つとして家計の所得を含めて考えることもできるだろう。特に、自動車のような財の場合、消費者固有の所得水準によって財の購入から得られる効用は変動することが考えられる（所得効果（income effect））。例えば、所得の上昇により社会的な地位が上昇した消費者は、大衆車よりも高級車を持つことより大きな効用を得られるだろう。すると、分析で設定する効用関数の中に所得の項を考える必要がある。

BLPは、次のようなCobb-Douglas型効用関数を考えている。

$$U_{ij} = (y_i - p_j)^\alpha \exp\left(\sum_{k=1}^K \beta_i^k x_j^k + \xi_j\right) \exp(\varepsilon_{ij}). \quad (35)$$

この対数を $u_{ij} \equiv \ln(U_{ij})$ とすれば、対数効用は、

$$u_{ij} = \alpha \ln(y_i - p_j) + \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \xi_j + \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_j^k + \varepsilon_{ij}. \quad (36)$$

また、財を購入しないことによる対数効用は、

$$u_{i0} = \alpha \ln(y_i) + \xi_0 + \sigma^0 \nu_j^0 + \varepsilon_{i0} \quad (37)$$

となる。

この定式化で、 $\ln(y_i - p_j)$ の項の係数 α は所得効果を表している。この項を、本稿では**所得・価格項**と呼ぼう。所得効果は、BLPの分析における自動車などの財においては無視できないものであるが、Nevo（2000, 2001）のようにシリアル食品のような必需品を分析する場合は所得効果を含む設定はあまり好ましくない。後で説明するように、Nevo（2000, 2001）はこの所得・価格項を $(y_i - p_j)$ として、所得効果を含まないモデルを設定している。BLPの設定では、所得・価格項は市場シェアの中に残ってしまうが、Nevo（2000, 2001）の設定では、消去されることになる。これは、Nevo（2000, 2001）では、効用の中で所得と価格が加法的に分離されているためである。

消費者の所得水準 y_i は既存のデータより推定することができる。BLPは、Current Population Survey（CPS）の年データより、所得が平均 m_i 、標準偏差 $\hat{\sigma}_y$ の対数正規分布にしたが

うと仮定している。つまり、 ν_i^y を標準正規分布にしたがう変数とすると、効用関数は、

$$u_{ij} = \alpha \ln \left(\exp(m_t + \hat{\sigma}_y \nu_i^y) - p_j \right) + \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \xi_j + \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_j^k + \varepsilon_{ij} \quad (38)$$

と書ける。この ν_i^y を追加して、あらためて $\nu_i = (\nu_i^y, \nu_i^1, \dots, \nu_i^K)$ とすると、上の基本モデルと同様に、財 j の市場シェアは、

$$s_j(\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\mu}) = \int_{\boldsymbol{\nu}} \frac{\exp(\delta_{ij} + \mu_{ij})}{1 + \sum_{j'=1}^J \exp(\delta_{ij'} + \mu_{ij'})} dF(\boldsymbol{\nu}) \quad (39)$$

となり、数値計算上の市場シェアは、 N 回サンプルを抽出することで

$$\hat{s}_j(\hat{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\exp(\delta_{nj} + \hat{\mu}_{nj})}{1 + \sum_{j'=1}^J \exp(\delta_{nj'} + \hat{\mu}_{nj'})} \quad (40)$$

となる。ただし、 $\delta_{ij} \equiv \alpha \ln \left(\exp(m_t + \hat{\sigma}_y \nu_i^y) - p_j \right) + \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \xi_j$ 、 $\hat{\delta}_{nj} \equiv \alpha \ln \left(\exp(m_t + \hat{\sigma}_y \nu_n^y) - p_j \right) + \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \xi_j$ とする。このモデルの推定は、(40) 式を (12) 式の代わりに用いて行えばよい。

消費者の属性

一方、Nevo (2000, 2001) は、シリアル食品の分析として効用の中に消費者の属性変数を含んだモデルを考えている。ここで、消費者の属性（デモグラフィック）とは、性別、年齢、学歴、職業などが考えられる。このようなデータは、人口統計などによって求めることができる。分析対象となる財の種類によっては、そのような消費者の属性によって財に対する嗜好が変化する場合が考えられ、このモデルはそのような状況をうまく扱うことができる。

そのような消費者の属性が N_d 個観察できるとして、消費者 i の属性ベクトルを $(D_{i1}, \dots, D_{iN_d})$ で表そう。この変数は観察可能な消費者の属性であるのに対して、財の特性に対して発生する $(\nu_i^1, \dots, \nu_i^K)$ は観察不可能な消費者の属性と考えることができる¹⁸。この2つの属性変数は、互いに独立であると仮定する。

ここでは、Nevo (2000, 2001) にならって、所得・価格項を $(y_i - p_j)$ としよう。すると、対数効用は、

$$u_{ij} = \alpha_i (y_i - p_j) + \sum_{k=1}^K \beta_i^k x_j^k + \xi_j + \varepsilon_{ij} \quad (41)$$

となる。ここで、 β_i^k は、消費者の観察可能な属性と観察不可能な属性の両方を含んでいる。つまり、基本モデルのランダム係数 (9) 式は、次のように書きかえられる。

$$\beta_i^k = \bar{\beta}^k + \pi_1^k D_{i1} + \dots + \pi_{N_d}^k D_{iN_d} + \sigma^k \nu_i^k. \quad (42)$$

同様に、所得・価格項のパラメータ α_i もランダム係数として、

18 Nevo (2001) は、観察不可能な消費者の属性の例として「犬を飼っているかないか」をあげている。

$$\alpha_i = \bar{\alpha} + \pi_1^\alpha D_{i1} + \dots + \pi_{N_d}^\alpha D_{i,N_d} + \sigma^\alpha \nu_i^\alpha \quad (43)$$

と書ける。すると、推定すべきパラメータは次のような形にまとめて表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i^1 \\ \vdots \\ \beta_i^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta}^1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi_1^\alpha & \pi_2^\alpha & \dots & \pi_{N_d}^\alpha \\ \pi_1^1 & \pi_2^1 & \dots & \pi_{N_d}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1^K & \pi_2^K & \dots & \pi_{N_d}^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{i1} \\ D_{i2} \\ \vdots \\ D_{i,N_d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_i^\alpha \\ \nu_i^1 \\ \vdots \\ \nu_i^K \end{bmatrix}, \quad (44)$$

または、

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta}_i \end{bmatrix} + \mathbf{\Pi} D_i + \mathbf{\Sigma} \nu_i. \quad (45)$$

消費者 i が財 j を購入することで得られる効用は、

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \alpha_i (y_i - p_j) + \sum_{k=1}^K \beta_i^k x_j^k + \xi_j + \varepsilon_{ij} \\ &= \alpha_i y_i + \sum_{k=1}^K \beta_i^k x_j^k - \bar{\alpha} p_j + \xi_j - \left(\sum_{d=1}^{N_d} \pi_d^\alpha D_{id} + \sigma^\alpha \nu_j^\alpha \right) p_j + \sum_{k=1}^K \left(\sum_{d=1}^{N_d} \pi_d^k D_{id} + \sigma^k \nu_j^k \right) + \varepsilon_{ij} \\ &\equiv \alpha_i y_i + \delta_j + \tilde{\mu}_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad \tilde{\mu}_{ij} \equiv [-p_j, x_j^1, \dots, x_j^K] (\mathbf{\Pi} D_i + \mathbf{\Sigma} \nu_i) \end{aligned} \quad (46)$$

となり、一方、消費者が何も購入しないときの効用は、

$$u_{i0} = \alpha_i y_i + \varepsilon_{i0} \quad (47)$$

となる。

観察可能な消費者の属性が人口統計などのデータベースより確率分布を推定できるとして、その確率分布を $G(D)$ とすれば、財 j の市場シェアは次のように計算できる。

$$s_j = \int_{\nu, D} \frac{\exp(\delta_j + \tilde{\mu}_{ij})}{1 + \sum_{j'=1}^J \exp(\delta_{j'} + \tilde{\mu}_{ij'})} dF(\nu) dG(D). \quad (48)$$

この Nevo (2000, 2001) のモデルは所得効果を含んでいないので、市場シェアから $\alpha_i y_i$ が消去されていることに注意しよう¹⁹。このモデルでは、消費者間の嗜好の違いは D_{id} と ν_i^k を通じて市場シェアに影響を与える。このモデルを推定するには、上の基本モデルと同様に、 F と G にしたがるサンプルを抽出し、(12) 式を計算して予測される市場シェアとすればよい。

19 これは、下の関係より明らかである。

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{u_{ij} \geq u_{ij'}\} &= \text{Prob}\{\alpha_i y_i + \delta_j + \tilde{\mu}_{ij} + \varepsilon_{ij} \geq \alpha_i y_i + \delta_{j'} + \tilde{\mu}_{ij'} + \varepsilon_{ij'}\} \\ &= \text{Prob}\{\delta_j + \tilde{\mu}_{ij} + \varepsilon_{ij} \geq \delta_{j'} + \tilde{\mu}_{ij'} + \varepsilon_{ij'}\}. \end{aligned}$$

5. 2 供給サイドの均衡

基本モデルは需要サイドのみを考え、需要関数の推定を行ったが、供給サイドの分析がなければ不十分である。なぜならば、寡占市場において企業は価格支配力を持っているので、その市場の均衡価格は各企業の費用構造とも関係しているからである。BLPは需要サイドだけでなく、供給サイドの均衡も考え、需要・供給を合わせたモデルを考えている。以下では、BLPにしたがって、供給サイドの推定を考えよう²⁰。この供給サイドの推定で推定したいものは、企業の費用に関するパラメータである。一般に、企業の費用情報は観察できない情報であるため、価格や財の特性の観察できる情報より費用を推定することが目的となる。

企業 $f=1, \dots, F$ が存在し、それぞれの企業が J 個の財のうちのいくつかを生産しているとしてよう。企業 f が生産している財の集合を J_f で表す。限界生産費用は生産量にかかわらず一定であり、費用の特性の関数とする。費用の特性には観察可能な費用の特性と観察不可能な費用の特性があり、財 j に対してそれぞれ w_j と ω_j で表す。費用の特性に関して対数線形の限界費用関数を仮定すると、限界費用 mc_j は $\gamma^1, \dots, \gamma^H$ をパラメータとして、

$$\ln(mc_j) = \gamma^1 w_j^1 + \dots + \gamma^H w_j^H + \omega_j \quad (49)$$

となる。(11) 式によって市場シェア $s_j = s_j(\delta, \mu)$ が決まるとすると、企業 f の利潤は、

$$\Pi_f = \sum_{j \in J_f} (p_j - mc_j) M s_j \quad (50)$$

となる。ただし、 M を市場の消費者人口とする。ここで、各企業が自分の財の特性と他の企業の財の特性を観察して最適価格を決定するようなベルトラン競争 (Bertrand competition) を考えよう。すると、企業 f が財 j を生産するとき、その最適価格 p_j に関する 1 階の条件は、

$$s_j + \sum_{j \in J_f} (p_j - mc_j) \frac{\partial s_j}{\partial p_j} = 0 \quad (51)$$

となる。この条件は、行列・ベクトル表現で

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1J} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{J1} & \Lambda_{J2} & \cdots & \Lambda_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 - mc_1 \\ p_2 - mc_2 \\ \vdots \\ p_J - mc_J \end{bmatrix}, \quad (52)$$

または、

$$s(\delta, \mu) = \Lambda(p - mc) \quad (53)$$

と書ける。ただし、

20 Nevo (1998) の製品差別化市場における推測的変動 (conjectural variation) の議論も参照のこと。

$$\Lambda_{jj'} = \begin{cases} \alpha s_j(1-s_j) & \text{if } j=j', \\ -\alpha s_j s_{j'} & \text{if } j \neq j' \text{ and } j, j' \in J_f, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (54)$$

(49) 式を (53) 式に代入して、 $\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \dots, \omega_J)'$ について解いたものを次のように書こう。

$$\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \ln(\mathbf{p} - \Lambda^{-1} \mathbf{s}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})) - \sum_{h=1}^H \gamma^h \mathbf{w}^h. \quad (55)$$

ただし、 $\mathbf{w}^h \equiv (w_1^h, \dots, w_J^h)'$ 。ここで、需要サイドのパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ と供給サイドのパラメータ $(\gamma^1, \dots, \gamma^H)$ をまとめて、 $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^K, \alpha, \sigma^1, \dots, \sigma^K, \gamma^1, \dots, \gamma^H)$ とし、 $\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})$ を使ってパラメータ $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ を推定することを考える。

パラメータ $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ を推定する場合の問題点は、費用の特性と価格が明らかに相関しているということである。例えば、費用の特性が財のサイズや性能を含むとき、それは価格に反映されているはずである。すなわち、第 3.4 節で考えたように、この推定においては ω_j に関して直交条件を満たすような操作変数を考える必要がある。あらためて、操作変数ベクトルとして、 ξ_{tj} に対して、 $(\tilde{h}_{tj}^1, \dots, \tilde{h}_{tj}^{L_1})$ 、 ω_{tj} に対して $(\tilde{h}_{tj}^1, \dots, \tilde{h}_{tj}^{L_2})$ を考えよう。

すると、基本モデルの (26) 式は次のように書きかえられる。

$$\begin{aligned} \hat{m}_\ell(\boldsymbol{\xi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) &\equiv \frac{1}{TJ} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \xi_{tj}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \tilde{h}_{tj}^\ell, \quad \ell = 1, \dots, L_1, \\ \tilde{m}_\ell(\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) &\equiv \frac{1}{TJ} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^J \omega_{tj}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \tilde{h}_{tj}^\ell, \quad \ell = 1, \dots, L_2. \end{aligned} \quad (56)$$

標本モーメントを、

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}), \boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \equiv (\hat{m}_1(\boldsymbol{\xi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})), \dots, \hat{m}_{L_1}(\boldsymbol{\xi}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})), \tilde{m}_1(\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})), \dots, \tilde{m}_{L_2}(\boldsymbol{\omega}(\tilde{\boldsymbol{\theta}})))'$$

としよう $((L_1 + L_2) \times 1)$ 。そこで、これを用いて目的関数を作り、それを最小化するようなパラメータを求めればよい。MPEC の場合は、変数と制約式を加えて、

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}} \quad & \mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega})' \mathbf{W} \mathbf{m}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}) \\ \text{subject to:} \quad & \hat{\mathbf{s}}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{S}, \\ & \xi_j = \delta_j - \sum_{k=1}^K \tilde{\beta}^k x_j^k + \alpha p_j, \quad j = 1, \dots, J, \\ & \hat{\mu}_{nj} = \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_n^k, \quad n = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J, \\ & \boldsymbol{\omega} = \ln(\mathbf{p} - \Lambda^{-1} \hat{\mathbf{s}}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{\mu}})) - \sum_{h=1}^H \gamma^h \mathbf{w}^h. \end{aligned} \quad (57)$$

となる。

なお、BLP では、需要サイドの ξ_j に対して 15 個、供給サイドの ω_j に対して 18 個の操作変数を用いている。

5.3 ネステッドロジット型モデル

ネストと IIA の回避

第 2 節で指摘したように、ロジット型モデルによる分析結果は代替パターンに関して大きな問題をもたらす。ある財の変化に対して他の財の間に比例的な代替パターンが生じるからである。これが、「無関係な選択対象からの独立性 (IIA)」によって生じるものであることはすでに指摘した。このような性質は、現実の経済分析に対してとても限定的な含意しかもたらさないので、この問題を解消する別の方法を考える必要がある。ネステッドロジット型モデル (nested logit model) は、財をいくつかのグループ (以下、ネスト (nest) と呼ぶ) に分け、「入れ子」的に推定を行うモデルである。以下では、まず、Train (2009) にしたがってネステッドロジット型モデルを考えよう。

製品差別化された多数の財があるとし、いくつかのネストに分ける。ここで、次の 2 つが満たされているとする。

- 同じネストに属する任意の 2 つの財に関して IIA が生じる。つまり、その 2 つの財の選択確率の比は他の財に対して独立に決定する。
- それぞれ異なるネストに属する任意の 2 つの財に関しては IIA が生じない。つまり、その 2 つの財の選択確率の比は他の財に対して独立ではない。

Train (2009) は、以下のような通勤手段の例を使っている。ある通勤者が通勤手段として、「自家用車」「相乗り」「バス」「電車」の 4 つの選択肢を考えている²¹。ここで問題は、この 4 つの選択肢のうち 1 つの選択肢が利用不可能となり削除されるとしたら、他の 3 つの選択肢が選択される確率はどのように上昇するだろうか、ということである。Train (2009) は、もっともらしい選択確率の変化を表 2 のように示している。

表 2 通勤手段の代替パターン^a

通勤手段	変化前	削除された手段			
		自家用車	相乗り	バス	電車
自動車	0.40	—	0.45 (+12.5%)	0.52 (+30%)	0.48 (+20%)
相乗り	0.10	0.20 (+100%)	—	0.13 (+30%)	0.12 (+20%)
バス	0.30	0.48 (+60%)	0.33 (+10%)	—	0.40 (+33%)
電車	0.20	0.32 (+60%)	0.22 (+10%)	0.35 (+70%)	—

a Train (2009), p. 78 より作成。

21 ここで、「相乗り (carpooling)」とは、1 台の車に複数の通勤者が乗り合わせて移動する手段である。

ここで、{自動車, 相乗り} のいずれかの財が削除されたときは、それ以外の財が同じ比率で変化しており、{バス, 電車} のいずれかの財が削除されたときは、それ以外の財が同じ比率で変化している。つまり、自動車と相乗りは同じネストに含まれ、バスと電車は同じネストに含まれていると考えられる（図1）。

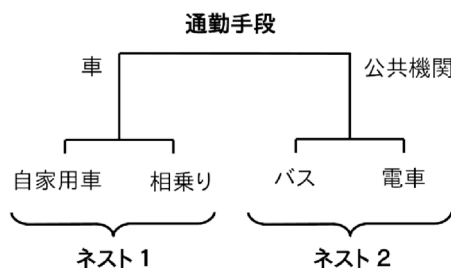


図1 通勤手段とネスト

Train (2009), p. 79 より作成.

一般的に、ある選択肢 j が、ネスト G_1, \dots, G_L のいずれか1つに含まれるとき、個人 i がその選択肢を選ぶことにより効用 $u_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij}$ が得られるとすれば、ネステッドロジット型モデルでは、 $\epsilon_i = (\epsilon_{i1}, \dots, \epsilon_{iL})$ は次のような分布にしたがう。

$$\exp\left(-\sum_{\ell=1}^L \left(\sum_{j \in G_\ell} \exp(-\epsilon_{ij}/\lambda_\ell)\right)^{\lambda_\ell}\right). \quad (58)$$

ここで、 λ_ℓ はネスト G_ℓ に含まれる財の間の相関の度合いを表すパラメータであり ($0 \leq \lambda_\ell \leq 1$)、 $\sigma_\ell \equiv 1 - \lambda_\ell$ が1に近づくならば相関が大きいことを示す。ここでは、この σ_ℓ をネスト G_ℓ の相関パラメータ (correlation within nest) と呼ぼう。 ϵ_i がこの分布にしたがうとき、選択肢 j と j' が同じネスト G_ℓ に含まれるならば、その選択確率の比は、

$$\frac{P_{ij}}{P_{ij'}} = \frac{\exp(\delta_{ij}/\lambda_\ell)}{\exp(\delta_{ij'}/\lambda_\ell)}, \quad (59)$$

選択肢 j と j' がそれぞれ異なるネスト $G_\ell, G_{\ell'}$ に含まれるならば、

$$\frac{P_{ij}}{P_{ij'}} = \frac{\exp(\delta_{ij}/\lambda_\ell) (\sum_{j \in G_\ell} \exp(\delta_{ij}/\lambda_\ell))^{\lambda_\ell}}{\exp(\delta_{ij'}/\lambda_{\ell'}) (\sum_{j \in G_{\ell'}} \exp(\delta_{ij'}/\lambda_{\ell'}))^{\lambda_{\ell'}}} \quad (60)$$

となる。

BLP モデルへの適用

このネステッドロジット型モデルを、BLP モデルへ適用してみよう²²。まず、消費者の嗜好が同質的なロジット型モデルの効用関数は (1) 式であった。いま、財 $j \in J$ が、高級車 (luxury)

22 以下の説明は、Berry (1994) にしたがっている。

か大衆車 (popular) のいずれかに分類されるとし、それぞれのネストを G_L , G_P で表す。また、単純化のために、相関パラメータは各ネストで共通とし、 σ で表そう。すると、ネステッドロジット型モデルでの効用関数は次のように定式化できる。

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^K \beta^k x_j^k - \alpha p_j + \xi_j + \sum_{g \in \{G_L, G_P\}} d_{jg} \zeta_{jg} + (1-\sigma) \varepsilon_{ij}$$

$$\equiv \delta_j + \sum_{g \in \{G_L, G_P\}} d_{jg} \zeta_{jg} + (1-\sigma) \varepsilon_{ij}. \quad (61)$$

ただし、 $\delta_j \equiv \sum_{k=1}^K \beta^k x_j^k - \alpha p_j + \xi_j$ とする。 d_{jg} はダミー変数であり、財 j がネスト g に含まれていたら 1, 含まれていなければ 0 の値をとる。消費者 i は $u_{ij} \geq u_{ij'}$, $\forall j' \neq j$ ならば財 j を選んで購入するとすると、攪乱項 ε_{ij} , $j=0, \dots, J$ がそれぞれ独立にタイプ I 型極値分布 P にしたがうならば、ネスト g に含まれる財 j の g の中での市場シェア $s_{j/g}$ は、次のようになる。

$$s_{j/g} = \frac{\exp(\delta_j / (1-\sigma))}{\sum_{j' \in g} \exp(\delta_{j'} / (1-\sigma))}. \quad (62)$$

これを、ネスト内市場シェアと呼ぼう。また、ネスト g 全体の市場シェアは、

$$s_g = \frac{\left(\sum_{j \in g} \exp(\delta_j / (1-\sigma)) \right)^{1-\sigma}}{\sum_{g \in \{G_L, G_P\}} \left(\sum_{j' \in g} \exp(\delta_{j'} / (1-\sigma)) \right)^{1-\sigma}} \quad (63)$$

となる。ここで、ネスト g に含まれる財 j に対して

$$s_j = s_{s/g} \cdot s_g \quad (64)$$

という関係が成り立っている。また、財を購入しない消費者の割合は、

$$s_0 = \frac{1}{\sum_{g \in \{G_L, G_P\}} \left(\sum_{j' \in g} \exp(\delta_{j'} / (1-\sigma)) \right)^{1-\sigma}} \quad (65)$$

である。(62) 式より、 $\sum_{j' \in g} \exp(\delta_{j'} / (1-\sigma)) = \exp(\delta_j / (1-\sigma)) / s_{j/g}$ であるので、(63) 式と (65) 式より、任意の j に対して

$$\frac{s_g}{s_0} = \left(\frac{\exp(\delta_j / (1-\sigma))}{s_{j/g}} \right)^{1-\sigma} \quad (66)$$

という関係が得られる。(64) 式より $s_j / s_0 = (s_g / s_0) s_{j/g}$ なので、その対数をとったものは、(66) 式の関係を用いれば、

$$\ln\left(\frac{s_j}{s_0}\right) = \ln\left(\frac{s_g}{s_0}\right) + \ln(s_{j/g})$$

$$= \delta_j - (1-\sigma) \ln(s_{j/g}) + \ln(s_{j/g})$$

$$= \delta_j + \sigma \ln(s_{j/g}) \quad (67)$$

となる。そこで、ネステッドロジット型モデルを推定するには、

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \sum_{k=1}^K \beta^k x_j^k - \alpha p_j + \sigma \ln(s_{j/g}) + \xi_j \quad (68)$$

を推定式としてパラメータ $\beta^1, \dots, \beta^K, \alpha, \sigma$ を推定すればよい。

この推定式における問題は、価格 p_j のみならず、ネスト内市場シェアの対数値 $\ln(s_{j/g})$ も内生変数であるということである。なぜならば、ネスト内市場シェアは財 j の市場シェアによって変化し、それはまた ξ_j と相関しているはずだからである。このことより、この推定を OLS で行うのは適切ではない。したがって、価格と同様に、ネスト内市場シェアについても $E[\xi_j | z_j] = 0$ かつ $E[s_{j/g} | z_j] \neq 0$ となるような操作変数 z_j を考えて用いなければならない。

なお、このモデルでの、ネスト g に含まれる財 j の自己価格弾力性は、

$$\eta_{jj} = -\frac{\alpha}{1-\sigma} p_j - \frac{\alpha}{1-\sigma} s_{j/g} p_j + \alpha(1-s_g) s_{j/g} p_j, \quad j \in g \quad (69)$$

となる。また、財 j, j' が同じネスト g に含まれる場合、財 j の価格 p_j に対する交差価格弾力性は、

$$\eta_{jj'} = -\frac{\alpha}{1-\sigma} s_{j/g} p_j + \alpha(1-s_g) s_{j/g} p_j, \quad j, j' \in g \quad (70)$$

となり、財 j のみがネスト g に含まれる場合の財 j の価格 p_j に対する交差価格弾力性は、

$$\eta_{jj'} = -\alpha s_g s_{j/g} p_j, \quad j \in g, j' \notin g \quad (71)$$

となる。

6 経済分野の応用例

以上、BLP モデルについて説明した。以下では、このモデルを使った経済分野の応用例として、3つの分析を概説する。その分析とは、BLP 自身の実証分析、消費者の属性を含むモデルとして Nevo (2001)、ネステッドロジット型モデルとして Kusuda (2016) を考える。理解を助けるために、表 3 に以下で説明する各モデルの設定をまとめておく。

表 3 各モデルの分類^a

	Random Variables	Income Effect	Consumer Attributes	Supply-Side	Nested-Logit
BLP					
Logit Model (OLS/IV)		✓			
Full Model	✓	✓		✓	
Nevo (2001)					
Logit Model			✓	✓	
Full Model	✓		✓	✓	
Kusuda (2016)					✓

a モデルの種類は、左からランダム係数、所得効果、消費者の属性、供給サイド、ネステッドロジット型を表す。ランダム係数モデルでないものはロジット型モデルである。

6.1 BLP のアメリカ自動車市場モデル

BLP の分析を見る前に、そこで使われているモデルについてまとめよう。そのモデルとは、所得効果（第 5.1 節）を想定し、供給サイドの特性（第 5.2 節）を含むランダム係数モデルである（表 3 参照）。ここでは、このモデルを BLP のフルモデル（full model）と呼ぶことにしよう。BLP のフルモデルの対数効用関数と供給サイドの 1 階の条件を再掲すると、

$$u_{ij} = \alpha \ln(y_i - p_j) + \sum_{k=1}^K \bar{\beta}^k x_j^k + \xi_j + \sum_{k=1}^K \sigma^k x_j^k \nu_j^k + \varepsilon_{ij}, \quad (72)$$

$$s_j + \sum_{j' \in J_j} \left(p_{j'} - \exp \left(\sum_{h=1}^H \gamma^h w_j^h + \omega_j \right) \right) \frac{\partial s_j}{\partial p_j} = 0 \quad (73)$$

である（ $j=1, \dots, J$ ）。観察されるデータは、財の特性（ x_j^k ）、財の価格（ p_j ）、費用の特性（ w_j^h ）、市場シェア（ s_j ）であり、推定したいパラメータは、 $\bar{\beta}^k$ 、 σ^k 、 α 、 γ^h となる。

データ

BLP のアメリカ自動車市場の研究は、以下のとおりである。まず、財の特性として、自動車の特性を *Automotive News Market Data Book* から得ている。その特性とは、

1. 気筒数 (number of cylinders)
2. ドア数 (number of doors)
3. 重量 (weight)
4. 排気量 (engine displacement)
5. 馬力 (horsepower)
6. 車体全長 (length)
7. 車体全幅 (width)
8. ホイールベース (wheelbase)
9. 燃費 (EPA miles per gallon rating, MPG)²³
10. 前輪駆動車 (whether the car has front wheel drive)
11. オートマチックトランスミッション (automatic transmission)
12. パワーステアリング (power steering)
13. エアコン標準装備 (air conditioning as standard equipment)

である。ただし、この 10 から 13 まではダミー変数である。このうち実際に用いられたのは、3, 5, 6, 7, 9, 13 であり、表 4 のように財の特性と費用の特性の変数を作成している²⁴。

ここで、燃費に関しては、財の特性としては *MPG* が使われている。これは、ガソリン価格で調整された値である。ガソリン価格は、アメリカ商務省 *Business Statistics*, 1961-1988 より入

23 燃費はアメリカ環境保護庁 (EPA) が調査して算出している。

24 ここでは、変数を斜体太字で表す。

表4 BLPモデルの変数^a

財の特性 (x_j^k)	
<i>HP/Weight</i>	重量あたりの馬力=馬力/重量
<i>Air</i>	エアコン標準装備の有無 (ダミー変数)
<i>MP\$</i>	1ドルあたりのマイル数=燃費(MPG)/ガソリン価格
<i>Size</i>	車体サイズ=車体全長×車体全幅
費用の特性 (w_j^k)	
$\ln(\text{HP/Weight})$	重量あたりの馬力 (=馬力/重量) の対数値
<i>Air</i>	エアコン標準装備の有無 (ダミー変数)
$\ln(\text{MPG})$	燃費 (ガソリン1ガロンあたりのマイル数) の対数値
$\ln(\text{Size})$	車体サイズ (=車体全長×車体全幅) の対数値
<i>Trend</i>	技術革新や政府の規制など
$\ln(q)$	(オプション) 販売台数の対数値

a Berry et al. (1995) より作成.

手している。一方、費用の特性としての燃費は価格とは無関係なので、*MP\$*の代わりに *MPG* が使われている。費用の特性のうち、*HP/Weight*, *MPG*, *Size* は対数値に変換されているが、これはこれらの変数が限界費用の弾力性と見なされているためである。また、*Trend* は、技術革新や政府の規制などの変化などである。

一方、自動車価格は *Price* であり、1983年の表示価格を用いて消費者物価指数で調整している。市場サイズは、*Statistical Abstract of the U.S.* より入手した全米の世帯数を用いており、所得水準は、*Current Population Surveys* と *Consumer Reports* より推定されている。また、販売台数は登録台数にもとづき、「フリート販売」（レンタカー会社向けの販売）は含んでいない。

データは、1971年から1990年までの20年間で、サンプルサイズは2217となったが、同じ名前かどうか、また特徴が10%以上変化したかどうかによって、同一のモデルの条件を設けるとサンプルサイズは997となる。

操作変数

BLPで用いられた操作変数は、第3.4節で示した3つの項が考えられている。例えば、財の特性として自動車のサイズを考えるとすると、財 j の操作変数は、「その財 j のサイズ」「財 j を生産している企業の他の自動車のサイズの合計」「ライバル企業の生産する自動車のサイズの合計」の3つとなる²⁵。需要サイドの操作変数として、この3つを表4の財の特性に定数項を加えた5つの変数に適用するので $3 \times 5 = 15$ 個となる。一方、供給サイドの操作変数としては、この3つを表4の ($\ln(q)$ をのぞく) 費用の特性に定数項を加えた6つの変数に適用した上で、*MP\$* を加えた19個を用いたとしている。

25 (操作変数同士の積などの) 2次以上の変数も考慮したが、多重共線性の問題により却下したとしている。

推定結果

BLP は、フルモデルの推定の前に、「ロジット型モデル (OLS Logit)」「操作変数を用いたロジット型モデル (IV Logit)」「供給サイドの OLS モデル」の 3 つのモデルを推定している。ロジット型モデル (OLS/IV) の推定式は、

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \beta_0 + \beta_1(HP/Weight)_j + \beta_2Air_j + \beta_3MP\$_j + \beta_4Size_j + \beta_5Trend_j + \alpha Price_j + \xi_j \quad (74)$$

であり、上の第 2.1 節の (5) 式と同じものである²⁶。一方、供給サイドの推定式は、価格の対数値を費用の特性に回帰したもので、

$$\ln(Price_j) = \gamma_0 + \gamma_1 \ln((HP/Weight)_j) + \gamma_2 Air_j + \gamma_3 \ln(MPG_j) + \gamma_4 (Size_j) + \gamma_5 Trend_j + \omega_j \quad (75)$$

となる。これらの結果は、表 5 のようになっている。ここで、1 列目のロジット型モデルと 2 列目の操作変数を用いたロジット型モデルを比較すると、定数項 *Size* 以外では明確な違いが見られる。このうち、*HP/Weight* と *Air* は、操作変数によって符号が改善されている。(これらの

表 5 BLP の推定結果 (ロジット型モデル)^a

Variable	OLS Logit Demand	IV Logit Demand	OLS ln(<i>price</i>) on <i>w</i>
Constant	-10.068 (0.253)	-9.273 (0.493)	1.882 (0.119)
<i>HP/Weight</i> *	-0.121 (0.277)	1.965 (0.909)	0.520 (0.035)
<i>Air</i>	-0.035 (0.073)	1.289 (0.248)	0.680 (0.019)
<i>MP\$</i>	0.263 (0.043)	0.052 (0.086)	—
<i>MPG</i> *	—	—	-0.471 (0.049)
<i>Size</i> *	2.341 (0.125)	2.355 (0.247)	0.125 (0.063)
<i>Trend</i>	—	—	0.013 (0.002)
<i>Price</i>	-0.089 (0.004)	-0.216 (0.123)	—
No. Inelastic Demands (+/-2 s.e.'s)	1494 (1429-1617)	22 (7-101)	<i>n.a.</i>
<i>R</i> ²	0.387	<i>n.a.</i>	0.656

a Berry et al. (1995), p. 873, TABLE III より引用。左から、ロジット型モデル、操作変数を用いたロジット型モデル、供給サイドの回帰モデルの結果を表す。括弧の数値は標準誤差。*がついている変数は、3 列目の推定のみで対数値。

26 ただし、ここでは価格の係数 *a* は負の値をとる。

表6 BLPの推定結果（フルモデル）^a

Variable	Parameter Estimate	Standard Error	Parameter Estimate	Standard Error
<u>Demand Side Parameters</u>				
β^k : Constant	-7.061	0.941	-7.304	0.746
<i>HP/Weight</i>	2.883	2.019	2.185	0.896
<i>Air</i>	1.521	0.891	0.579	0.632
<i>MPG</i>	-0.122	0.320	-0.049	0.164
<i>Size</i>	3.460	0.610	2.604	0.285
σ^k : Constant	3.612	1.485	2.009	1.017
<i>HP/Weight</i>	4.628	1.885	1.586	1.186
<i>Air</i>	1.818	1.695	1.215	1.149
<i>MPG</i>	1.050	0.272	0.670	0.168
<i>Size</i>	2.056	0.585	1.510	0.297
α : $\ln(y-p)$	43.501	6.427	23.710	4.079
<u>Cost Side Parameters</u>				
γ^h : Constant	0.952	0.194	0.726	0.285
$\ln(\text{HP/Weight})$	0.477	0.056	0.313	0.071
<i>Air</i>	0.619	0.038	0.290	0.052
$\ln(\text{MPG})$	-0.415	0.055	0.293	0.091
$\ln(\text{Size})$	-0.046	0.081	1.499	0.139
<i>Trend</i>	0.019	0.002	0.026	0.004
$\ln(q)$			-0.387	0.029

a Berry et al. (1995), p. 876, TABLE IV より引用（一部の記号を追加・変更）.

特性は、おそらく市場シェアを押し上げるはずである。）価格 *Price* に関しては、操作変数がないければ（絶対値の意味で）過小評価されている。つまり、価格の内生性（この場合は価格と誤差項の正の相関）が確認できる。これは、より性能の高い自動車であれば企業はより高い価格を設定できるからである（3列目の結果より）。

フルモデルの結果は、表6のように報告されている。ここで、1列目と2列目は $\ln(q)$ を含むモデルであり、3列目と4列目は含まないモデルである。費用の特性に関して、ロジット型モデル（表5の3列目）とフルモデル（表6の1列目）を比較すると、定数項と *Size* で大きな違いが見られる。BLPの説明によると、これは、ロジット型モデルが価格を費用の特性に回帰したものであるのに対し、フルモデルが価格からマークアップを引いた対数値を回帰したものであることによる（(55)式を参照）。また、このモデルでは、規模に対する収穫一定が仮定されているが、*MPG* と *Size* は自動車の販売数と正の相関を持つことが推測される。したがって、この2つの係数は過小評価されている。BLPは、コントロール変数として $\ln(q)$ を含むモデルも推定し、表6の3列目と4列目に結果を示している。これにより、この2つの係数の値は改善されているようである。

財の特性の結果を見ると、*Air* と *Size* の係数はロジット型モデルと比較して大きな値となっている。全体として、それぞれの係数は、 β_j^k と σ_j^k の少なくともいずれか一方において正の効果を持っている。

表7 BLPの推定結果（需要の自己弾力性）^a

Model	<i>HP/Weight</i>	<i>Air</i>	<i>MP\$</i>	<i>Size</i>	<i>Price</i>
Mazda323	0.366	0.000	3.645	1.075	5.049
	0.458	0.000	1.010	1.338	6.358
Sentra	0.391	0.000	3.645	1.092	5.661
	0.440	0.000	0.905	1.194	6.528
Escort	0.401	0.000	4.022	1.116	5.663
	0.449	0.000	1.132	1.176	6.031
Cavalier	0.385	0.000	3.142	1.179	5.797
	0.423	0.000	0.524	1.360	6.433
Accord	0.457	0.000	3.016	1.255	9.292
	0.282	0.000	0.126	0.873	4.798
Taurus	0.304	0.000	2.262	1.334	9.671
	0.180	0.000	-0.139	1.304	4.220
Century	0.387	1.000	2.890	1.312	10.138
	0.326	0.701	0.077	1.123	6.755
Maxima	0.518	1.000	2.513	1.300	13.695
	0.322	0.396	-0.136	0.932	4.845
Legend	0.510	1.000	2.388	1.292	18.944
	0.167	0.237	-0.070	0.596	4.134
TownCar	0.373	1.000	2.136	1.720	21.412
	0.089	0.211	-0.122	0.883	4.320
Seville	0.517	1.000	2.011	1.374	24.353
	0.092	0.116	-0.053	0.416	3.973
LS400	0.665	1.000	2.262	1.410	27.544
	0.073	0.037	-0.007	0.149	3.085
BMW735i	0.542	1.000	1.885	1.403	37.490
	0.061	0.011	-0.016	0.174	3.515

a Berry et al. (1995), p. 879, TABLE V より引用.

最後に、表7にBLPが計算した財の特性と価格に関する需要の自己弾力性を示す。（ランダム係数モデルの自己価格弾力性と交差価格弾力性は、それぞれ(13)式と(14)式によって計算できる。）それぞれの車種ごとに、財の特性および価格の値（上段）と自己弾力性（下段）が示されている。ここでは、自己価格弾力性（最後の列）のみに注目すると、小型車であるMazda323やSentraは高い価格弾力性を持っているのに対し、大型車であるLS400やBMW735iは低い価格弾力性を持っている。ここで、財の特徴（大型車または小型車）によってはっきりとした違いを確認することができるので、ランダム係数モデルによってよりもっともらしい結果が得られたことがわかる。

6.2 Nevo (2001) のシリアル食品モデル

Nevo (2001) は、朝食用 (Ready-to-Eat, RTE) のシリアルデータのデータを用いた、消費者の属性を含むランダム係数モデルの代表的な研究分析である。また、Nevo (2000) とその付録は、その需要サイドの分析のみ、より簡潔に説明したBLPモデルのためのガイドとして参考にされている。シリアル産業は、高い集中度、高いマージン、高い売上高広告比率によって特徴付けられる産業であり、製品差別化市場の分析例として適切であると言える。Nevo (2001) はランダム係数モデルを使って、価格費用マージン (price-cost margin, PCM) を推定している。ここ

で、Nevo のフルモデル（full model）は、消費者の属性（第 5.1 節）と供給サイドの特性（第 5.2 節）を含むランダム係数モデルである。（表 3 を参照。）このフルモデルで用いられる効用関数は、市場 t に対して、

$$u_{tij} = \delta_{tj} + \tilde{\mu}_{tij} + \varepsilon_{tij},$$

$$\delta_{tj} \equiv \sum_{k=1}^K \tilde{\beta}^k x_j^k - \alpha p_{tj} + \xi_j + \Delta \xi_{tj}, \quad \tilde{\mu}_{tij} \equiv [p_{tj}, x_j^1, \dots, x_j^K] (\Pi D_i + \Sigma \nu_i) \quad (76)$$

である。ただし、ここで追加されている $\Delta \xi_{tj}$ は、市場固有の観察不可能な財の特性である。もし、推定の中でブランドダミー変数を使うとすれば、それは $\sum_{k=1}^K \tilde{\beta}^k x_j^k + \xi_j$ と同じ意味となる。（このモデルでは、財は特性の組み合わせで表現されている。）したがって、その場合は ξ_j の代わりに $\Delta \xi_{tj}$ を使うことになる。

データ

データは、25 ブランドの市場シェア、価格、財の特性、広告量、および消費者の属性である。期間は 1988 年から 1992 年までの四半期であり、市場の数は最大 65 である（期間中に増えている）。市場シェアと価格はコネチカット大学の *IRI Infoscan Data Base* より入手している。推定に用いられた変数を、表 8 にまとめた。なお、消費者の属性は、*Current Population Survey* から入手し、観察不可能な属性は標準正規分布にしたがうとし、40 回サンプルをとっている（ $N = 40$ ）。

操作変数としては、BLP のような財の特性は、市場や期間においてほとんど変動がないのでこの場合には適さない。ここで、適切な操作変数とは、価格の変動を限界費用によるものと、観察不可能なものの 2 つに分けるようなものである。そこで、市場固有の変動が他の市場からは独

表 8 Nevo モデルの変数^a

財の特性 (x_j^k)	
<i>Cal from Fat</i>	脂質によるカロリー
<i>Sugar</i>	糖質
<i>Mushy</i>	牛乳でふやかせるタイプ (ダミー変数)
<i>Fiber</i>	繊維質
<i>ALL-family</i>	一般向け
<i>Kids</i>	子供向け
<i>Adults</i>	大人向け
消費者の特性 (D_{id})	
<i>Income</i>	所得水準
<i>Income Sq</i>	所得水準の 2 乗
<i>Age</i>	年齢
<i>Child</i>	16 歳未満 (ダミー変数)
その他の変数	
<i>Advertising</i>	広告量

a Nevo (2001) より作成。

立であると仮定して、他の市場の価格（実際には「広域地域の価格の平均」）を1つの操作変数として選択している。もう1つの操作変数として、限界費用を考えており、生産費用、パッケージ費用、配送費用の3つのうち、配送費用を採用している。この変数は、市場の密度やスーパーマーケットの売上などに関連しているため、「地域ダミー変数」で代用可能である。さらに、「ブランドダミー変数」も操作変数の1つに加えている。

推定結果

Nevo (2001) は、BLP と同様に、フルモデルの前にロジット型モデルを検証している（ここではその結果は省略する）。ロジット型モデルでは、10 パターンの推定式を考え、説明変数にブランドダミー変数を用いる場合や用いない場合、また、上にあげた3つの操作変数のいずれかを使った場合を比較している。

フルモデルの結果は、表9のように示されている。定数項、価格 (*Price*)、財の特性 (*Cal from Fat, Sugar, Mushy, Fiber*) の他に、*Advertising, All-family, Kids, Adults* が変数に含まれている。表9によると、全ての結果が予測されるもので満足のいく結果となっている。

表9 Nevo の推定結果 (フルモデル)^a

Variable	Mean (β 's)	Standard Deviations (σ 's)	Interactions with Demographic Variables:			
			Income	Income Sq	Age	Child
<i>Price</i>	-27.198 (5.248)	2.453 (2.978)	315.894 (110.385)	-18.200 (5.914)	—	7.634 (2.238)
<i>Advertising</i>	0.020 (0.005)	—	—	—	—	—
Constant	-3.592 (0.138)	0.330 (0.609)	5.482 (1.504)	—	0.204 (0.341)	—
<i>Cal from Fat</i>	1.146 (0.128)	1.624 (2.809)	—	—	—	—
<i>Sugar</i>	5.742 (0.581)	1.661 (5.866)	-24.931 (9.167)	—	5.105 (3.418)	—
<i>Mushy</i>	-0.565 (0.052)	0.244 (0.623)	1.265 (0.737)	—	0.809 (0.385)	—
<i>Fiber</i>	1.627 (0.263)	0.195 (3.541)	—	—	—	-0.110 (0.0513)
<i>ALL-family</i>	0.781 (0.075)	0.1330 (1.365)	—	—	—	—
<i>Kids</i>	1.021 (0.168)	2.031 (0.448)	—	—	—	—
<i>Adults</i>	1.972 (0.186)	0.247 (1.636)	—	—	—	—
GMM Objective (degrees of freedom)			5.05 (8)			
MD χ^2			3472.3			
% of Price Coefficients > 0			0.7			

a Nevo (2001), p. 327, TABLE VI より引用。

6.3 日本のビール類飲料モデル

最後に、ネステッドロジット型モデルの推定例として、Kusuda (2016) の日本のビール類飲料モデルを見てみよう。この研究では、日本のビール類飲料の3つのカテゴリーのそれぞれをネストとして、2005年と2006年の価格・販売量データを用いて2006年5月に施行された酒税法の改正の影響を需要の価格弾力性によって分析した。言うまでもなく、日本のビール類市場は、アサヒ、麒麟、サッポロ、サントリーの4社による典型的な寡占市場であり、ビール類飲料は製品差別化された財と言える。

日本のビール類飲料は、「ビール」「発泡酒」「第3のビール」の3種類に分類される。このうち、本来の“ビール”は最初の財のみで、残りの2つは日本のビール会社が開発した別の飲料であり、厳密にはビールとは区別されるものである。発泡酒とは、ビールの原料である麦芽（モルツ）の比率が低い飲料である。これは、日本の税制ではビールに課税される税率が麦芽比率を基準に決められているためであり、より税率の低い飲料として生まれたという経緯がある。さらに、発泡酒に対する税率が改正されると、第3のビールが登場した。これは原料に麦芽を使用しない飲料である。このような理由で、ビール、発泡酒、第3のビールの価格はかなり異なる。

このような市場は、第5.3節で説明したネステッドロジット型モデルとして分析するのが好ましい。ビール、発泡酒、第3のビールのネストを $G \equiv \{G_B, G_H, G_T\}$ としよう。消費者の効用関数は、

$$u_{ij} = \alpha p_j + \sum_{k=1}^K \beta^k x_j^k + \xi_j + \sum_{g \in G} d_{jg} \zeta_{jg} + (1 - \sigma) \varepsilon_{ij} \quad (77)$$

となり、推定式は

$$\ln(s_j) - \ln(s_0) = \alpha p_j + \sum_{k=1}^K \beta^k x_j^k + \sigma \ln(s_{j/g}) + \xi_j \quad (78)$$

となる。なお、Nevo (2001) と同様に、このモデルでは所得効果は無視している。

データは、日経 NEEDS より入手し、2005年5月30日から2005年11月6日までの23と、2006年5月29日から2006年11月5日までの23週の171のビール類飲料を用いた。また、全国を10地域に分け、週・地域を「市場」と見なした。推定は、OLSと操作変数法（2段階OLS）で行った。財の特性としては、各商品の成分表示より、表10の候補をまず選んだ²⁷。ただし、これらの財の特性の間の多重共線性に考慮する必要があるため、他の特性と相関が強い *Calories*, *Alcohol*, *Protein* を排除した²⁸。

第5.3節で指摘したように、(78)式の中で、価格 p_j とネスト内市場シェア $\ln(s_{j/g})$ はそれぞれ誤差項 ξ_j と相関していることを考えなければならない。そのための操作変数として、価格に対しては「財の他の地域の平均価格」を、ネスト内市場シェアに対しては「財のネスト内の価格

27 この他の成分として脂質とナトリウムがあるが、ほとんど全ての商品で表示上0gであった。

28 例えば、*Calories* と *Sugar* の相関係数は0.9143となった。

シェア」または「財の特性」を用いた。

表 11 に 2005 年のみ推定結果を示す。

表 10 Kusuda (2016) の変数^a

財の特性 (x_j^k)	
<i>Color</i>	黒ビール (ダミー変数)
<i>Non-draught</i>	生ビール (ダミー変数)
<i>Alcohol</i>	アルコール分 (%)
<i>Calories</i>	カロリー (kcal, 100 ミリリットルあたり)
<i>Protein</i>	たんぱく質 (g, 100 ミリリットルあたり)
<i>Sugar</i>	糖質 (g, 100 ミリリットルあたり)
<i>Fiber</i>	食物繊維 (g, 100 ミリリットルあたり)
<i>Purine</i>	プリン体 (mg, 100 ミリリットルあたり)
その他の変数	
<i>Temperature</i>	地域ごとの平均気温
<i>Humidity</i>	地域ごとの平均湿度

a Kusuda (2016)より作成。

表 11 ビール市場の推定 (2005)^a

	OLS	IV(1)	IV(2)	IV(3)
<i>Price</i>	-0.001124 * (0.0005)	-0.009230 *** (0.0011)	-0.001408 * (0.0006)	-0.082731 *** (0.0017)
$\ln(s_{j/g})$	0.946589 *** (0.0077)	0.663184 *** (0.0268)	0.881453 *** (0.0121)	-1.082086 (0.5530)
<i>Color</i>	-0.035938 (0.0481)	0.270784 *** (0.0689)	-0.079902 (0.0519)	—
<i>Non-draught</i>	-0.065644 * (0.0334)	-0.391922 *** (0.0472)	-0.150108 *** (0.0352)	
<i>Sugar</i>	-0.080329 *** (0.0126)	-0.149363 *** (0.0163)	-0.083169 *** (0.0131)	
<i>Fiber</i>	0.374016 (0.3219)	-4.378910 *** (0.6195)	-0.094798 (0.3778)	
<i>Purine</i>	0.005343 (0.0082)	0.123423 *** (0.0166)	0.007078 (0.0100)	
<i>Asahi</i>	3.418299 *** (0.1519)	4.578943 *** (0.2225)	3.390617 *** (0.1639)	
<i>Kirin</i>	3.293008 *** (0.1509)	4.365548 *** (0.2173)	3.238853 *** (0.1623)	
<i>Sapporo</i>	3.209192 *** (0.1564)	4.304541 *** (0.2249)	3.141631 *** (0.1682)	
<i>Suntory</i>	3.129668 *** (0.1506)	3.891098 *** (0.2021)	2.996117 *** (0.1594)	
<i>Temperature</i>	0.032715 *** (0.0019)	0.031380 *** (0.0022)	0.032029 *** (0.0019)	0.028827 *** (0.0047)
<i>Humidity</i>	-0.013324 *** (0.0017)	-0.014893 *** (0.0019)	-0.013267 *** (0.0017)	-0.030786 *** (0.0049)
Adjusted R2	0.8793			
Sargan statistic		2.54E-19	103.2595	1.53E-10
Instrument variables		average price, price share	average price, characteristics	average price, price share

a サンプルは 4805 個。括弧は標準誤差。操作変数 average price は「財の他の地域の平均価格」、price share は「財のネスト内の価格シェア」、characteristics は「財の特性」を示す。*** は 0.001 で有意、** は 0.01 で有意、* は 0.05 で有意。

ここで、推定結果は OLS と異なる操作変数による IV による結果である。IV(3) のみ、財の特性の代わりにブランドダミー変数と *Temperature*, *Humidity* を用いた。まず、価格 *Price* の係数を見ると、OLS より全ての IV の場合において（絶対値の意味で）大きくなっている。また、ネスト内シェア $\ln(s_{j/g})$ の係数は、IV(1) のみ（絶対値の意味で）OLS より小さく、下方修正されている。全体として、IV(1) の結果が好ましい結果となった。Kusuda (2016) では、さらに、各ブランドの自己価格弾力性と交差価格弾力性の計算しており、2005 年の税制改正により、それらの弾力性が下落し、消費者のネスト間の移動が緩慢になったことを示唆している。

7 おわりに

本稿では、BLP モデルを中心に静的離散選択モデルを説明した。ここで説明したことは、静的離散選択モデルのごく一部であり、ごく基本的な内容である。本稿ではレビューすることは避けたが、構造推定の研究の中で BLP モデルを用いた実証研究は膨大なものがあり、さらに、この分野に関する実証研究はさらに発展の可能性がある。特に、産業政策の効果に関する実証研究として、現実の政策に対して重要な示唆を与えることができるであろう²⁹。今後ともこの分野の研究の展開に期待したい。

参考文献

- Akerberg, D., Benkard, C. L., Berry, S., & Pakes, A. (2007). Econometric tools for analyzing market outcomes. in Heckman, J. J. & Leamer, E. E. (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 6, (pp. 4171-4276). Amsterdam: North-Holland.
- Berry, S. (1994). Estimating discrete-choice models of product differentiation. *RAND Journal of Economics*, 25, 242-262.
- Berry, S., Levinsohn, J., & Pakes, A. (1995). Automobile prices in market equilibrium. *Econometrica*, 63, 841-890.
- Berry, S., Levinsohn, J., & Pakes, A. (1999). Voluntary export restraints on automobiles: Evaluating a trade policy. *American Economic Review*, 89, 400-430.
- Bresnahan, T. F. (1987). Competition and collusion in the American automobile industry: The 1955 price war. *Journal of Industrial Economics*, 35, 457-482.
- Cameron, A. C. & Trivedi, P. K. (2005). *Microeconometrics: Methods and Applications*. New York: Cambridge University Press.
- Davis, P. & Garcés, E. (2010). *Quantitative Techniques for Competition and Antitrust Analysis*. Princeton: Princeton University Press.
- Dubé, J.-P., Fox, J. T., & Su, C.-L. (2012). Improving the numerical performance of static and dynamic aggregate discrete choice random coefficients demand estimation. *Econometrica*, 80, 2231-2267.
- Greene, W. H. (2012). *Econometric Analysis (7th edition)*. London: Pearson Education.

29 例えば、BLP の 3 人の執筆者自身の実証研究として Berry et al. (1999) がある。

- Hayashi, F. (2000). *Econometrics*. Princeton: Princeton University Press.
- Hendler, R. (1975). Lancaster's new approach to consumer demand and its limitations. *American Economic Review*, 65, 194-199.
- Kusuda, Y. (2016). Nested logit demand estimation in Japanese beer-like beverage markets. 日本福祉大学経済論集, 52, 45-65.
- 楠田康之 (2018a). 動的離散選択モデルの構造推定 (サーベイ論文) —シングルエージェントの意思決定問題—. 日本福祉大学経済論集, 56, 43-80.
- 楠田康之 (2018b). 動的離散選択モデルの構造推定 2 (サーベイ論文) —動学ゲーム—. 日本福祉大学経済論集, 57, 97-136.
- Lancaster, K. (1971). *Consumer Demand: A New Approach*. New York: Columbia University Press.
- McFadden, D. L. (1973). Conditional logit analysis of qualitative choice behaviour. in Zarembka, P. (ed.), *Frontiers in Econometrics*, (pp. 105-142). New York: Academic Press.
- 蓑谷千風彦 (2007). 『計量経済学大全』東洋経済新報社.
- Nevo, A. (1998). Identification of the oligopoly solution concept in a differentiated-products industry. *Economics Letters*, 59, 391-395.
- Nevo, A. (2000). A practitioner's guide to estimation of random-coefficients logit models of demand. *Journal of Economics & Management Strategy*, 9, 513-548.
- Nevo, A. (2001). Measuring market power in the ready-to-eat cereal industry. *Econometrica*, 69, 307-342.
- Stokey, N. L. & Lucas, R. E. (1989). *Recursive Methods in Dynamic Economics*. Cambridge: Harvard University Press.
- Train, K. E. (2009). *Discrete Choice Methods with Simulation*. New York: Cambridge University Press.
- Wooldridge, J. M. (2002). *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. Cambridge: MIT Press.

付録 A 無関係な選択対象からの独立性について

この付録では、Train (2009) に依拠しながら、「無関係な選択対象からの独立性」について補足する。

代替パターン

いま、ある財の属性が変化したとしよう。例えば、ある財の価格が下落したとする。すると、その変化によって、その財が選択される確率は上昇し、他の財が選択される確率は当然下落するだろう。あるいは、ある携帯電話会社のある機種が、新しい機能を追加したとする。このとき、消費者がどの機種からどの機種に変更するか、いくつものパターンが考えられるだろう。消費者分析において、このような代替パターン (substitution patterns) の問題はとても重要である。第 2.1 節で説明したロジット型モデルは、ある 1 つの代替パターンを示しているが、その代替パターンは適切とは限らず、より一般的な代替パターンを示すことはできない。なぜ不適切かとい

う理由は、次のような選択確率の比を調べることで明らかになる（以下の説明は、Train (2009), pp. 45-47 より）。

任意の2つの財 j と k に対して、その購入から得られる消費者 i の効用をそれぞれ u_{ij} , u_{ik} で表そう。このとき、ロジット型モデルにおいて、財 j と k の選択確率の比は次のようになる。

$$\frac{P_{ij}}{P_{ik}} = \frac{\exp(u_{ij}) / \sum_j \exp(u_{ij})}{\exp(u_{ik}) / \sum_j \exp(u_{ij})} = \exp(u_{ij} - u_{ik}). \quad (79)$$

ここで、この比は、 i と k 以外の第3の財には依存していない。つまり、この値は、他のどの財が選択可能かということとは無関係である。このことを、無関係な選択対象からの独立性 (**independence of irrelevant alternatives, IIA**) と呼ぶ。このIIAがいかにおかしいことか示すために、次の有名な例でより具体的に説明しよう。この例は、赤いバスと青いバスの問題と呼ばれる。(Train (2009) の数値例をそのまま用いた。)

例：「赤いバスと青いバスの問題」

ある通勤者が会社へ行くのに自家用車 c を使うか、色が青いバス bb を使うかを考えている。この2つの選択肢の平均的な効用が等しいとすれば、2つの選択肢に対する選択確率は等しい。したがって、 $P_c = P_{bb} = 1/2$ で、選択確率の比は $P_c/P_{bb} = 1$ となる。

ここに、第3の選択肢として色が赤いバス rb が加わるとしよう。色が違うだけなので、その選択確率は青いバスと同じで、 $P_{rb}/P_{bb} = 1$ となるはずである。ところが、ロジット型モデルでは、赤いバスの有無にかかわらず、 $P_c/P_{bb} = 1$ のままなので、3つの選択確率は等しくならなければならない。すなわち、 $P_c = P_{bb} = P_{rb} = 1/3$ が成り立たなければならない。

しかし、現実的に考えてこれはおかしい。なぜならば、色が違うだけのバスが加わったとしても、自家用車を選択する確率が変化するのははずはないからである。実際は、バスの色が違うだけなので、赤いバスと青いバスを選ぶ確率は同じで、それぞれ、バスを選ぶという確率の半分になるはずである。すなわち、 $P_c = 1/2$, $P_{bb} = 1/4$, $P_{rb} = 1/4$ となるのが自然である。このように、IIAは、どちらのバスを選ぶかという確率を過大に評価し、自家用車を選ぶ確率を過小に評価しているということになる。

消費者が複数の選択肢より1つのみ選ぶという状況を分析する場合、ロジット型モデルを使うと問題が生じることがわかった。第6節で見たような自動車、シリアル、ビール類飲料などは、すべてこの問題を含んでいる。そのような選択肢をネストに分けると、実際には図2のようになっているはずである。このような状況を推定するには、すでに述べたようなランダム係数モデルか、あるいはネステッドロジット型モデルを考えなければならない。

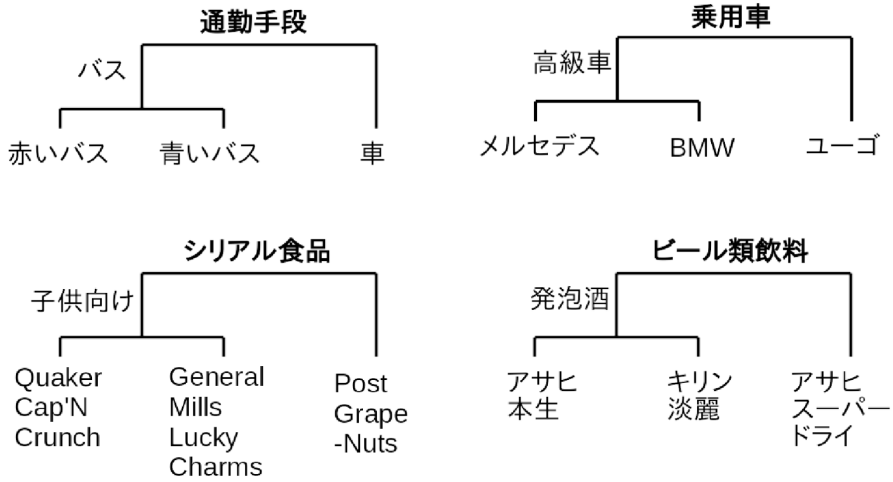


図2 無関係な選択対象からの独立

付録 B プログラムコード

ここでは、第4節で用いたプログラムコード (Python) を掲載する。

```
# coding: utf-8
# BLP モデルの推定
# ランダム係数モデルの推定
# BLP アルゴリズムと MPEC アルゴリズムを比較する

### 初期設定

## 必要なモジュール(numpy, pyomo, time, csv, datetime)
import numpy as np
from pyomo.environ import *
import time
import csv
import datetime

## 小数の桁数設定, 指数表示禁止
np.set_printoptions(precision=6, suppress=True)

## ソルバーの指定
SOLVER = "knitro"

## 使用するアルゴリズム(1=BLP, 2=MPEC, 3=BOTH)
ALG = 3

### グローバル変数

T = 50 # 市場の数
```

```

J = 25 # 財の数
K = 3 # 財特性の数
N = 100 # サンプルサイズ
SIMMAX = 20 # シミュレーションの回数

SIGMA = 0.5*(1/2) # サンプルの標準偏差  $\sigma$ 
XI_SD = 1.0 #  $\xi$  の標準偏差

### 関数 func_x_gen ( x を生成する)

def func_x_gen(K, J):
    x_s = np.random.rand(K+1, J)
    y_s = x_s*0
    y_s[0, :] = np.sqrt(-2.0*np.log(x_s[0, :])) \
        *np.cos(2.0*np.pi*x_s[1, :])
    y_s[1, :] = np.sqrt(-2.0*np.log(x_s[0, :])) \
        *np.sin(2.0*np.pi*x_s[1, :])
    y_s[2, :] = np.sqrt(-2.0*np.log(x_s[2, :])) \
        *np.cos(2.0*np.pi*x_s[3, :])
    y_s[3, :] = np.sqrt(-2.0*np.log(x_s[2, :])) \
        *np.sin(2.0*np.pi*x_s[3, :])

    # 最後の行は捨てる
    y_s = y_s[0:3, :]

    # 平均
    mu = np.array([0.0, 0.0, 0.0])[ : ,None]

    # 共分散行列
    Sig = np.array([[1.0, -0.8, 0.3], [-0.8, 1.0, 0.3], \
        [0.3, 0.3, 1.0]])

    # コレスキー分解
    A = np.linalg.cholesky(Sig)

    #  $X \sim N(z | \mu, \text{Sig})$ 
    X = A.dot(y_s) + mu

    return X

### パラメータの真の値

#  $\beta$  の平均
beta0_mean_true = -1.0
beta1_mean_true = 1.5
beta2_mean_true = 1.5
beta3_mean_true = 0.5

#  $\beta$  の標準偏差 ( $\sigma$ ) 今回は既知とする
sigma0 = SIGMA
sigma1 = SIGMA
sigma2 = SIGMA
sigma3 = SIGMA

#  $\alpha$ 
alpha_true = 3.0

### Pyomo を使うためのデータ変換関数

# NumPy 配列 (行列) を Python 辞書型へ変換 (関数)
def mat_to_dics(mat):
    dics = {}
    for j in range(mat.shape[0]):
        for i in range(mat.shape[1]):
            dics.update({j+1, i+1}: mat[j, i])
    return dics

# NumPy 配列 (ベクトル) を Python 辞書型へ変換 (関数)

```

```

def arr_to_dics(arr):
    dics = {}
    if arr.shape[0] < arr.shape[1]:
        arr = arr.T
    for i in range(len(arr)):
        dics.update({i+1: arr[i, 0]})
    return dics

### シミュレーション

# 結果 ( $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha$ , obj と BLP のみ  $\delta$  の収束回数)
ResultBLP = np.zeros((7, SIMMAX))
ResultMPEC = np.zeros((6, SIMMAX))
timeBLP = []
timeMPEC = []

# csv ファイル
now = datetime.datetime.now()
FilenameBLP = 'Result_BLP{0:%Y%m%d%H%M}.csv'.format(now)
FilenameMPEC = 'Result_MPEC{0:%Y%m%d%H%M}.csv'.format(now)

print("SIM_=_", end="")

for sim in range(SIMMAX):

    print(str(sim+1) + "_", end="")

    ### データの作成

    # 観察可能な財特性(x1 ,x2 ,x3) (TxJ) 行列 (同じ行が縦に T 回並ぶ)

    x = func_x_gen(K, J)
    x1 = np.tile(x[0, :], (J, (T, 1)))
    x2 = np.tile(x[1, :], (J, (T, 1)))
    x3 = np.tile(x[2, :], (J, (T, 1)))

    # 観察不可能な財特性 ( $\xi$ ) (TxJ 行列)
    xi = np.random.randn(T, J)*XI_SD

    # 価格シフター (e) (TxJ 行列)
    e = np.random.randn(T, J)

    # 価格 (p) (TxJ 行列)
    p = np.abs(0.5*xi + e + 1.1*(x1 + x2 + x3))

    # 操作変数(z1 ,... ,z6)
    z1 = np.random.rand(T, J) \
        + (1/4)*(e + 1.1*(x1 + x2 + x3))
    z2 = np.random.rand(T, J) \
        + (1/4)*(e + 1.1*(x1 + x2 + x3))
    z3 = np.random.rand(T, J) \
        + (1/4)*(e + 1.1*(x1 + x2 + x3))
    z4 = np.random.rand(T, J) \
        + (1/4)*(e + 1.1*(x1 + x2 + x3))
    z5 = np.random.rand(T, J) \
        + (1/4)*(e + 1.1*(x1 + x2 + x3))
    z6 = np.random.rand(T, J) \
        + (1/4)*(e + 1.1*(x1 + x2 + x3))

    # 推定のために各変数を行列の形にしておく (価格は負にしておく)
    X = np.hstack((np.ones((T*J, 1)), \
        x1.reshape((T*J, 1)), x2.reshape((T*J, 1)), \
        x3.reshape((T*J, 1)), -p.reshape((T*J, 1))))
    Z = np.hstack((np.ones((T*J, 1)), \
        z1.reshape((T*J, 1)), z2.reshape((T*J, 1)), \
        z3.reshape((T*J, 1)), z4.reshape((T*J, 1)), \
        z5.reshape((T*J, 1)), z6.reshape((T*J, 1)), \
        x1.reshape((T*J, 1)), x2.reshape((T*J, 1)), \

```

```

x3.reshape((T*J, 1)))

# 真のパラメータから  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  の生成 N 個
beta0 = np.random.normal(beta0_mean_true, sigma0, N)
beta1 = np.random.normal(beta1_mean_true, sigma1, N)
beta2 = np.random.normal(beta2_mean_true, sigma2, N)
beta3 = np.random.normal(beta3_mean_true, sigma3, N)

# 市場シェア
S = np.zeros((T, J))
for t in range(T):
    for j in range(J):
        tmp = 0.0
        for i in range(N):
            NUM = np.exp(beta0[i] \
                + beta1[i]*x1[t, j] \
                + beta2[i]*x2[t, j] \
                + beta3[i]*x3[t, j] \
                - alpha_true*p[t, j] + xi[t, j])
            SUM = 0.0
            for jj in range(J):
                SUM = SUM + np.exp(beta0[i] \
                    + beta1[i]*x1[t, jj] \
                    + beta2[i]*x2[t, jj] \
                    + beta3[i]*x3[t, jj] \
                    - alpha_true*p[t, jj] + xi[t, jj])
            tmp = tmp + NUM/(1 + SUM)
        S[t, j] = tmp/N

### BLP アルゴリズム
if ALG == 1 or ALG == 3:

    t1 = time.time()

    ## 推定（第 1 段階） $\delta$  の計算

    #  $v$  を正規分布から無作為抽出
    nu0 = np.random.randn(T, N)
    nu1 = np.random.randn(T, N)
    nu2 = np.random.randn(T, N)
    nu3 = np.random.randn(T, N)

    delta = np.zeros((T, J))
    for t in range(T):
        #print("t = " + str(t+1))

        kMAX = 1000
        delta_conv = 0
        for k in range(kMAX):
            diff = np.zeros(T)

            # 市場 t での市場シェアの計算
            s_hat = np.zeros((T, J))
            for j in range(J):

                tmp = 0.0
                for i in range(N):
                    NUM = np.exp(delta[t, j] \
                        + sigma0*nu0[t, i] \
                        + sigma1*x1[t, j]*nu1[t, i] \
                        + sigma2*x2[t, j]*nu2[t, i] \
                        + sigma3*x3[t, j]*nu3[t, i])

                    SUM = 0.0
                    for jj in range(J):
                        SUM = SUM \
                            + np.exp(delta[t, jj] \

```

```

        + sigma0*nu0[t, i] \
        + sigma1*x1[t, jj] \
            *nu1[t, i] \
        + sigma2*x2[t, jj] \
            *nu2[t, i] \
        + sigma3*x3[t, jj] \
            *nu3[t, i])

    tmp = tmp + NUM/(1 + SUM)

    s_hat[t, j] = tmp/N
    diff = np.linalg.norm(np.log(S[t, :]) \
        - np.log(s_hat[t, :]))
    if diff < 0.01:
        #print(" " + str(k))
        break;
    else:
        delta[t, :] = delta[t, :] \
            + np.log(S[t, :]) \
            - np.log(s_hat[t, :])

    # 収束回数を足しておく
    delta_conv = delta_conv + k

## 推定 (第2段階) パラメータの推定

#  $\delta$  を (TxJ) ベクトルに変える
DELTA = delta.reshape((T*J, 1))

# X の列の数
XNUM = np.shape(X)[1]

# Z の列の数
ZNUM = np.shape(Z)[1]

# 変数と制約式のインデックス集合
XSET = range(1, XNUM+1)
ZSET = range(1, ZNUM+1)
TJSET = range(1, T*J+1)

# ウェイト行列 (Z/Z)^(-1)
tmp = np.zeros((ZNUM, ZNUM))
for i in range(T*J):
    tmp = tmp + np.outer(Z[i, :], Z[i, :].T)
W = np.linalg.inv((1/(T*J))*tmp)

# コンクリート・モデルを指定
model = ConcreteModel()

# データの変換
model.X = mat_to_dics(X)
model.Z = mat_to_dics(Z)
model.W = mat_to_dics(W)
model.DELTA = arr_to_dics(DELTA)

# 変数を設定
model.theta = Var(XSET)
model.m = Var(ZSET)

# 目的関数の設定
def obj_rule(model):
    return sum(model.m[zj]*sum(model.m[zj] \
        *model.W[zi, zj] for zj in ZSET) \
        for zi in ZSET)
model.obj = Objective(rule=obj_rule, \
    sense=minimize)

# 制約式の設定

```

```

def con_rule(model, zi):
    return model.m[zi] == (1/(T*J)) \
        *sum(model.Z[i, zi]*(model.DELTA[i] \
            - sum(model.theta[xj]*model.X[i, xj] \
                for xj in XSET)) for i in TJSET)
model.con = Constraint(ZSET, rule=con_rule)

# ソルバーを指定して解を解く
opt = SolverFactory(SOLVER)
results = opt.solve(model)

# 結果の表示
#model.display()

# 結果を記録
ResultBLP[0, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[1]
ResultBLP[1, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[2]
ResultBLP[2, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[3]
ResultBLP[3, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[4]
ResultBLP[4, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[5]
ResultBLP[5, sim:sim+1] = model.obj()
ResultBLP[6, sim:sim+1] = delta_conv/T

t2 = time.time()
timeBLP.append(t2 - t1)

### MPEC アルゴリズム
if ALG == 2 or ALG == 3:

    t1 = time.time()

    #  $\nu$  を正規分布から無作為抽出
    nu0 = np.random.randn(T, N)
    nu1 = np.random.randn(T, N)
    nu2 = np.random.randn(T, N)
    nu3 = np.random.randn(T, N)

    #  $\mu$  の標本を計算(TJxN) 行列
    MU = np.zeros((T*J, N))
    for i in range(N):

        tmp = np.zeros((T, J))
        for t in range(T):
            for j in range(J):
                tmp[t, j] = sigma0*nu0[t, i] \
                    + sigma1*x1[t, j]*nu1[t, i] \
                    + sigma2*x2[t, j]*nu2[t, i] \
                    + sigma3*x3[t, j]*nu3[t, i]
            MU[:, i:i+1] = tmp.reshape((T*J, 1))

    # Sj / S0 の計算
    SjS0 = S/(1 - np.sum(S, axis=1)).reshape((T, 1))
    SjS0 = SjS0.reshape((T*J, 1))

    # X の列の数
    XNUM = np.shape(X)[1]

    # Z の列の数
    ZNUM = np.shape(Z)[1]

    # 変数と制約式のインデックス集合
    XSET = range(1, XNUM+1)

```

```

ZSET = range(1, ZNUM+1)
NSET = range(1, N+1)
TJSET = range(1, T*J+1)

# ウェイト行列(Z'Z)^(-1)
tmp = np.zeros((ZNUM, ZNUM))
for i in range(T*J):
    tmp = tmp + np.outer(Z[i, :], Z[i, :].T)
W = np.linalg.inv((1/(T*J))*tmp)

# コンクリート・モデルを指定
model = ConcreteModel()

# データの変換
model.X = mat_to_dics(X)
model.Z = mat_to_dics(Z)
model.MU = mat_to_dics(MU)
model.W = mat_to_dics(W)
model.SjS0 = arr_to_dics(SjS0)

# 変数を設定
model.theta = Var(XSET)
model.m = Var(ZSET)
model.XI = Var(TJSET)

# 目的関数の設定
def obj_rule(model):
    return sum(model.m[zj] \
               *sum(model.m[zj]*model.W[zj, zi] \
                    for zj in ZSET) for zi in ZSET)
model.obj = Objective(rule=obj_rule, \
                     sense=minimize)

# 制約式 1 の設定
def con_rule1(model, zi):
    return model.m[zi] == (1/(T*J)) \
           *sum(model.Z[i, zj]*model.XI[i] \
                for i in TJSET)
model.con1 = Constraint(ZSET, rule=con_rule1)

# 制約式 2 の設定
def con_rule2(model, i):
    return (1/N)*sum(exp(sum(model.theta[xj] \
                              *model.XI[i, xj] for xj in XSET) \
                      + model.XI[i] + model.MU[i, n]) \
                    for n in NSET) * model.SjS0[i] == 0
model.con2 = Constraint(TJSET, rule=con_rule2)

# ソルバーを指定して解を解く
opt = SolverFactory(SOLVER)
results = opt.solve(model)

# 結果の表示
#model.display()

# 結果を記録
ResultMPEC[0, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[1]
ResultMPEC[1, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[2]
ResultMPEC[2, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[3]
ResultMPEC[3, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[4]
ResultMPEC[4, sim:sim+1] \
    = model.theta.get_values()[5]
ResultMPEC[5, sim:sim+1] = model.obj()
t2 = time.time()

```



```

timeMPEC.append(t2 - t1)

# 平均, 標準偏差, 平均計算時間, データ書き込み
if ALG == 1 or ALG == 3:
    MeanBLP = np.mean(ResultBLP , axis=1)
    StdBLP = np.std(ResultBLP , axis=1)
    MeanTimeBLP = np.mean(timeBLP)

    print("_")
    print("MeanBLP_=_")
    print(MeanBLP)
    print("StdBLP_=_")
    print(StdBLP)
    print("MeanTimeBLP_=_")
    print(MeanTimeBLP)

    f = open(FileNameBLP , 'w')
    writer = csv.writer(f, lineterminator= '\n')
    writer.writerows(ResultBLP)
    f.close()

if ALG == 2 or ALG == 3:
    MeanMPEC = np.mean(ResultMPEC , axis=1)
    StdMPEC = np.std(ResultMPEC , axis=1)
    MeanTimeMPEC = np.mean(timeMPEC)

    print("_")
    print("MeanMPEC_=_")
    print(MeanMPEC)
    print("StdMPEC_=_")
    print(StdMPEC)
    print("MeanTimeMPEC_=_")
    print(MeanTimeMPEC)

    f = open(FileNameMPEC , 'w')
    writer = csv.writer(f, lineterminator= '\n')
    writer.writerows(ResultMPEC)
    f.close()

```